Université Mohammed Premier
Faculté des Sciences
Département de Physique
Oujda

Filières : SMIA/ MIP S2 2018-2019/ 2019-2020/ 2020-2021/ 2021-2022

Recueil d'exercices

Optique Géométrique

Réalisé par :
M. HAMAL

Université Mohamed Premier

Faculté des Sciences Oujda

Département de Physique

Filière SMIA – TD Optique Géométrique Série 1

Exercice 1 : Du principe de Fermat à la loi de Snell-Descartes :

Un dioptre plan sépare deux milieux d'indices de réfraction n_1 et n_2.

On cherche le rayon lumineux qui se propage du point A, dans le premier milieu, vers le point B dans le deuxième milieu. I est le point d'intersection du dioptre plan avec le rayon.

1- Recopier et compléter le schéma ci-dessus, placer le point I sur le dioptre plan, le rayon AI puis IB, les angles i_1 et i_2 de ces deux rayons par rapport à la normale au dioptre passant par I, ainsi que (x_1,y_1) et (x_2,y_2) coordonnées respectives de A et B dans un repère orthonormé Ixy.

2- Exprimer le chemin optique L(AB) en fonction des grandeurs n_1, n_2, x_1, x_2, y_1 et $y = y_1 + y_2$. De combien de variables L(AB) dépend-il ?

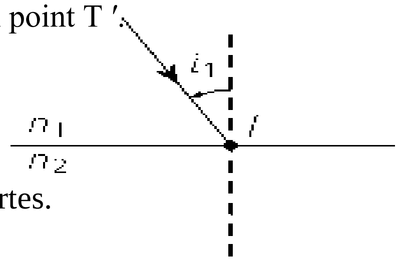
3- Retrouver la loi de Snell-Descartes en appliquant le principe de Fermat qui prévoit que le chemin optique est minimal (on dit aussi stationnaire).

Exercice 2 : Construction de Huygens

Cette construction géométrique permet de construire le rayon réfracté correspondant à un rayon incident donné.

- Du point d'incidence I comme centre, on trace deux demi-cercles de rayons $\frac{1}{n_1}$ et $\frac{1}{n_2}$
- On prolonge le rayon incident jusqu'à ce qu'il rencontre le demi-cercle de rayon $\frac{1}{n_1}$
- Du point d'intersection T, on mène la tangente qui coupe le dioptre en H.
- À partir de H, on mène la tangente à l'autre demi-cercle ce qui définit un point T '.

Le rayon réfracté est alors IT '.

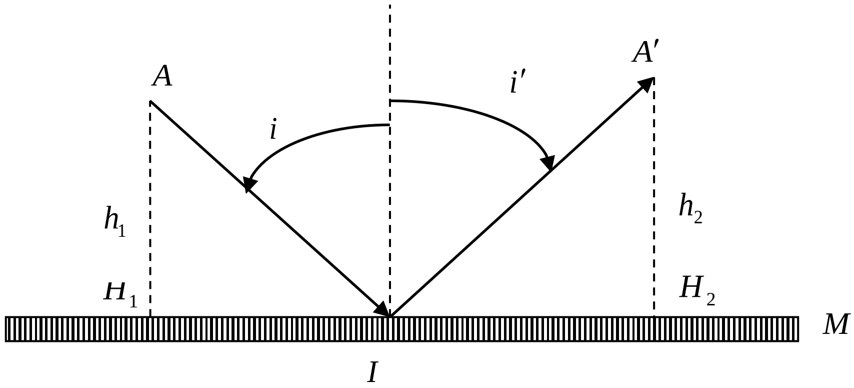


1. Suivre le mode opératoire dans les deux cas : n1 < n2 et n1 > n2.
2. Vérifier que cette construction est bien conforme aux lois de Snell-Descartes.
3. Retrouver les cas de la réfraction limite et de la réflexion totale.
4. Constructions :

. **Exercice 3 : Miroir plan et loi de réflexion**

Un rayon lumineux issu du point A subit une réflexion sur un miroir plan M fixe et passe par le point A'. Les points A et A' sont fixes (Voir la figure).

Trouver la relation qui existe entre i et i', le trajet suivi par le rayon lumineux correspond au temps le plus court pour aller de A à A'.



Exercice 3. Étude d'un prisme

Considérons un prisme en verre d'indice de réfraction n et d'angle au sommet A.

1- Une radiation monochromatique arrive sous incidence *i* sur la face d'entrée du prisme. Établir la relation qui lie les angles A, r et r'.

2- Exprimer la déviation D en fonction de A, i et i'. D est l'angle que fait l'angle émergent par rapport au rayon incident. Écrire les quatre relations fondamentales du prisme.

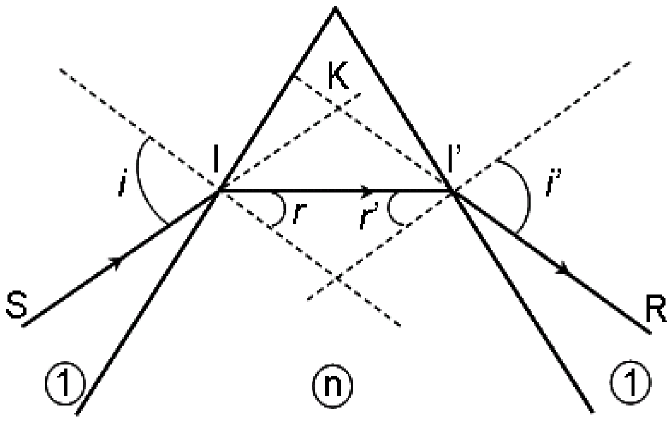
3- A quelle condition sur A et i, le rayon émerge t-il de la face de sortie du prisme ?

4- Par différenciation des quatre relations fondamentales du prisme, montrer que lorsque i varie, la dérivation D par un minimum D_m.

5- Déduire que l'indice du verre s'écrit sous la forme : $n = \frac{\sin\left(\frac{Dm+A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$

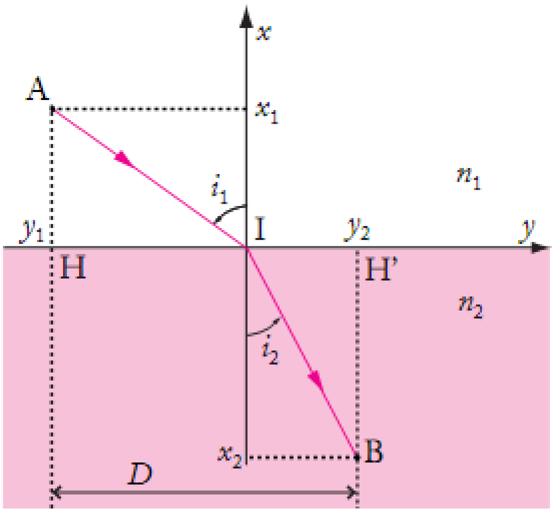
6- Les angles i et A étant constants trouver l'expression de la variation dD en fonction de dn.

7- La dispersion d'un prisme est caractérisée par : $\delta = \frac{dD}{d\lambda}$. Calculer δ si $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$, A et B sont des constantes. Déterminer alors la radiation la plus déviée parmi la Jaune et le Violet $\lambda_{Jaune} = 5790\,\text{Å}$ $\lambda_{Violet} = 4078\,\text{Å}$.



SOLUTION

1-



Les deux Points A, et B et le dioptre sont fixes donc x_1, x_2 sont constantes, de même la distance $D = y_2 - y_1$ qui sépare le point A et B sur l'axe des y est constante. Le Chemin Optique est alors $L(AB) = n_1.\boldsymbol{AI} + n_2.\boldsymbol{IB}$

Le triangle AIH donne : $\boldsymbol{AI} = \sqrt{\boldsymbol{x_1^2 + y_1^2}}$

Le triangle BIH' donne $\boldsymbol{IB} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{x_2^2 + (D + y_1\ )^2}$

On en déduit

$$L(AB) = n_1.\sqrt{\boldsymbol{x_1^2 + y_1^2}} + n_2.\sqrt{x_2^2 + (D + y_1\ )^2}$$

Ce chemin optique ne dépend que de y_1 puisque x_1, x_2 *et* D sont constants.

2- Le chemin optique ne dépend que de y_1 puisque x_1, x_2 *et* D sont constants. *Il est minimal si ses dérivées partielles par rapport à toutes les variables sont nulles. Ici* (AB) *ne depend que de* y_1

Cette condition s'exprime alors par

$$\frac{dL}{dy_1} = n_1 \frac{y_1}{\sqrt{\boldsymbol{x_1^2 + y_1^2}}} + n_2 \frac{D + y_1}{\sqrt{x_2^2 + (D + y_1)^2}} = 0$$

On a par ailleurs dans le triangle AHI,

$$\sin i_1 = \frac{-y_1}{\sqrt{\boldsymbol{x_1^2 + y_1^2}}}$$

Dans le triangle BH'I,

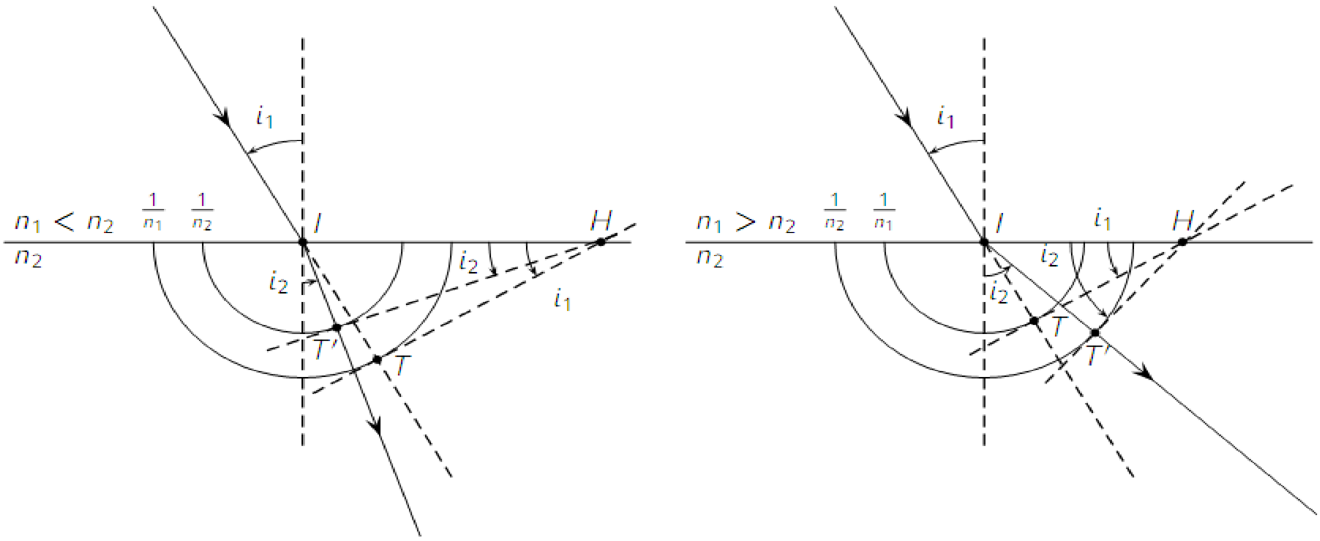
$$\sin i_2 = \frac{y_2}{\sqrt{\boldsymbol{x_2^2 + y_2^2}}} = \frac{D + y_1}{\sqrt{x_2^2 + (D + y_1)^2}}$$

On retrouve bien la loi de snelle Descart

$$n_1 . \sin i_1 = n_2 . sin\ \ i_2$$

<u>**Exercice 2 construction de Huygens**</u>

1- Construction



2-

Le rayon réfracte est bien dans le plan d'incidences. On doit montrer

$$n_1.\sin i_1 = n_2.sin\ i_2$$

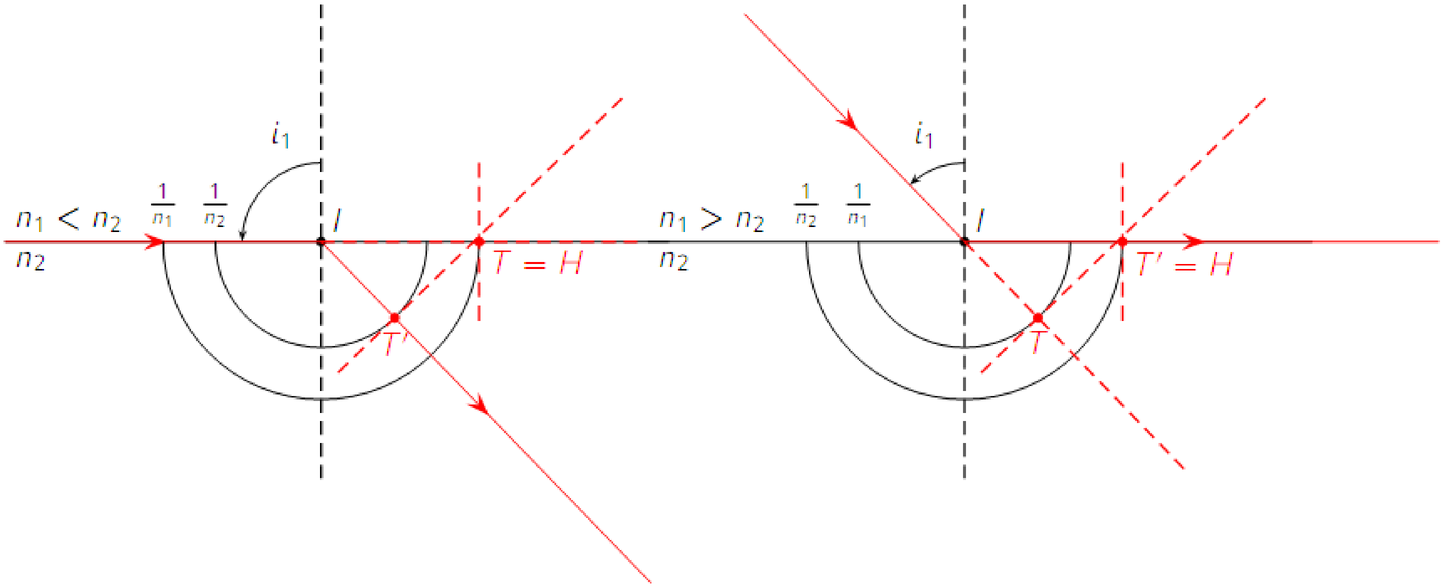
On utilise alors les triangles rectangles ayant un coté commun, on trouve les triangles ***ITH et IT'H*** de coté commun ***IH*** la somme des angles orientés est égale à π et dans le triangle ***ITH*** on en déduit : $(IH, IT) + (TH, TI) + (HI, HT) = \pi$ C.à.d $\frac{\pi}{2} - i_1 + \frac{\pi}{2} + (HI, HT) = \pi$ donc $(HI, HT) = i_1$

Par le mêmes travail pour le triangle $IT'H$, on montre que l'angle aigu (HI, HT')=i_2

Dans ITH on a $\sin i_1 = \frac{IT}{IH} \Longrightarrow IH = \frac{IT}{\sin i_1}$ avec $IT = \frac{1}{n_1}$ $rayon\ du\ cercle\ 1 \Longrightarrow IH = \frac{1}{n_1.\sin i_1}$

De même dans *IT'H* $sin\ i_2$=$\frac{IT'}{IH}$ *on en déduit* $IH = \frac{1}{n_2\ sin\ i_2}$

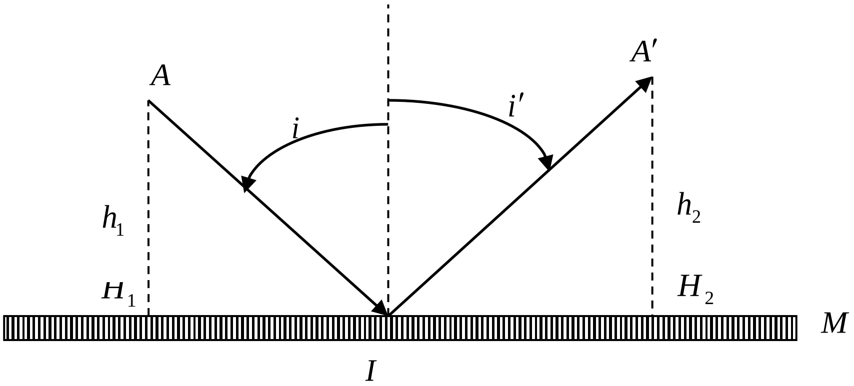
3. Les cas de la réfraction limite et de la réflexion totale correspondent à la situation pour laquelle H est situé sur le cercle extérieur, on obtient alors les figures suivantes :



Pour effectuer le second tracé, on pourra utiliser le principe du retour inverse de la lumière.

$$\boldsymbol{n_1 . \sin i_1 = n_2 . sin\ i_2}$$

Exercice 3 Miroir plan et loi de réflexion



Soit t le temps que met le rayon lumineux pour aller de A à A'.

$$t = \frac{AI}{c} + \frac{IA'}{c}, \quad \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} - i\right)}_{=\cos i} = \frac{AH_1}{AI} \Rightarrow AI = \frac{AH_1}{\cos i}$$

$$\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} - i'\right)}_{=\cos i'} = \frac{A'H_2}{IA'} \Rightarrow IA' = \frac{A'H_2}{\cos i'}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{c}\left(\frac{AH_1}{\cos i}\right) + \frac{1}{c}\left(\frac{AH_2}{\cos i'}\right).$$

Le trajet est stationnaire donc : $dt = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{c}\left[\left(\frac{AH_1 \sin i}{\cos^2 i}\right)di + \left(\frac{A'H_2 \sin i'}{\cos^2 i'}\right)di'\right] = 0$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{AH_1 \sin i}{\cos^2 i}\right)di + \left(\frac{A'H_2 \sin i'}{\cos^2 i'}\right)di'\right] = 0.$$

A et A' sont fixes donc la distance H_1H_2 est constante, alors $d(H_1H_2) = 0$.

$$tgi = \frac{H_1I}{AH_1} \Rightarrow H_1I = AH_1 tgi, \quad tgi' = \frac{IH_2}{A'H_2} \Rightarrow IH_2 = A'H_2 tgi'.$$

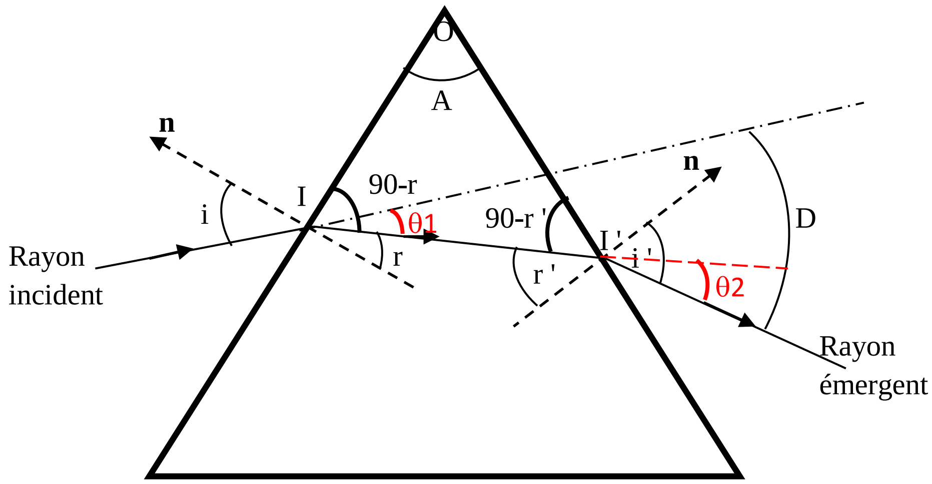
$$H_1H_2 = H_1I + IH_2 = AH_1 tgi + A'H_2 tgi'$$

$$\left.\begin{matrix} A & fixe \\ A' & fixe \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} AH_1 & fixe \\ A'H_2 & fixe \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$d\left(H_1H_2\right) = 0 \quad \Rightarrow \qquad \dfrac{AH_1}{\cos^2 i}di + \dfrac{A'H_2}{\cos^2 i'}di' = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{AH_1}{\cos^2 i}di = -\frac{A'H_2}{\cos^2 i'}di' \\ &\underbrace{\left[\left(\frac{AH_1 \sin i}{\cos^2 i}\right)di + \left(\frac{A'H_2 \sin i'}{\cos^2 i'}\right)di'\right]}_{=\left(\frac{AH_1}{\cos^2 i}di\right)\sin i + \left(\frac{A'H_2}{\cos^2 i'}di'\right)\sin i'} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sin i = \sin i'$$

Puisque les angles sont aigus (Inférieur à $\dfrac{\pi}{2}$) alors : $i = i'$.



1- La somme des angles du triangle OII' = 180° : $A + (90 - r) + (90 - r') = 180$, soit $A = r + r'$.

2- $D = \theta 1 + \theta 2 = (i - r) + (i' - r') = i + i' - A$

Les quatre relations fondamentales du prisme :

$\sin(i) = n.\sin(r)$ Loi de Descartes au niveau de la face d'entrée

$\sin(i') = n.\sin(r')$ Loi de Descartes au niveau de la face de sortie

$A = r + r'$

$D = i + i' - A$

3- Le rayon émerge de la face de sortie veut dire que $i' \leq \pi/2 \Rightarrow r' \leq \theta_L = \arcsin(1/n)$ car $n.\sin(\theta_L) = \sin(\pi/2) = 1$.

Par ailleurs, l'angle d'incidence $i \leq \pi/2$, l'angle $r \leq \theta_L = \arcsin(1/n)$.

Donc $r + r' \leq 2\,\theta_L$. Or $A = r + r'$. Pour qu'il y ait émergence il faut donc que $A \leq 2\,\theta_L$, c-a-d $A \leq 2.\arcsin(1/n)$

4- Les quatre relations fondamentales du prisme sont :

$\sin(i) = n.\sin(r)$

$\sin(i') = n.\sin(r')$

$A = r + r'$

$D = i + i' - A$

La différentielle de ces différentes relations donne :

$$\cos(i)\,di = n.\cos(r)\,dr \qquad (1)$$

$$\cos(i')\,di' = n.\cos(r')\,dr' \qquad (2)$$

$$0 = dr + dr' \qquad (3)$$

$$dD = di + di' \qquad (4)$$

la relation (4) conduit à : $\frac{\mathbf{dD}}{\mathbf{di}} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{di'}}{\mathbf{di}}$ **(5)**

Or, $\frac{(2)}{(1)}$ => $\frac{\cos(i')}{\cos(i)}\frac{di'}{di} = \frac{\cos(r')}{\cos(r)}\frac{dr'}{dr}$, soit : $\frac{di'}{di} = \frac{\cos(r').\cos(i)}{\cos(r).\cos(i')}\frac{dr'}{dr}$

Sachant que d'après (3), dr ' = -dr, il vient alors :

$$\frac{di'}{di} = \frac{-\cos(r').\cos(i)}{\cos(r).\cos(i')}$$

La relation (5) prend donc la forme : $\frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos(r').\cos(i)}{\cos(r).\cos(i')}$

Le minimum de D est obtenu pour $\frac{dD}{di} = 0$, soit $\frac{\cos(r').\cos(i)}{\cos(r).\cos(i')} = 1$, c'est-à-dire :

$$\cos(r').\cos(i) = \cos(r).\cos(i')$$

En élevant au carré, on obtient :

$$\cos^2(r').\cos^2(i) = \cos^2(r).\cos^2(i')$$

⇨

$$(1 - \sin^2(r')).(1 - \sin^2(i)) = (1 - \sin^2(r)).(1 - \sin^2(i'))$$

$$\left(1 - \sin^2(r')\right).(1 - n^2\sin^2(r)) = \left(1 - \sin^2(r)\right).(1 - n^2\sin^2(r'))$$

Soit :

$$(1 - n^2).(\sin^2(r) - \sin^2(r')) = 0$$

Il en résulte que r = ± r'

La solution r = -r' est exclue car elle implique que A = 0.

r = r' = r_m implique que i = i' = i_m.

(Si l'angle i= im tel que r = A/2, on aurait déviation minimale)

5- D = i + i' – A ➔ Dm = 2i_m –A .
Pour faire apparaittre l'indice n, il faut appliquer la loi de Descartes à l'angle i_m :
i_m = (Dm +A)/2 ➔ sin(i_m) = sin ((Dm +A)/2)

Or : sin(i_m) = n.sin(r_m), ce qui donne : n.sin(r_m) = sin ((Dm +A)/2) ou encore :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{Dm+A}{2}\right)}{\sin(r_m)} \qquad (6)$$

A la déviation minimale, r = r' = r_m , Or : A = r + r' ➔ r_m = A/2

La relation (6) prend donc la forme :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{Dm+A}{2}\right)}{\sin(A/2)}$$

6- Pour voir la variation de Dm en fonction des couleurs (c'est-à-dire Dm en fonction de λ), on commence, d'abord, par la variation de Dm en fonction de n : dDm/dn :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{Dm+A}{2}\right)}{\sin(A/2)} \quad \Rightarrow \quad dn = \frac{\cos\left(\frac{Dm+A}{2}\right)}{2\sin(A/2)} dDm$$

donc $\frac{dDm}{dn} = \frac{2\sin(A/2)}{\cos\left(\frac{Dm+A}{2}\right)} = \frac{2\sin(A/2)}{\cos(i_m)}$

Cette quantité est positif donc Dm est une fonction croissante par rapport à n (si n croit alors Dm croit).

Or d'après la relation de Cauchy : $n = a + b/\lambda^2$ donc si λ décroit, n croit et donc Dm croit : Dm est une fonction décroissante par rapport à λ. Pour le bleu λ est faible donc Dm est grande, alors que pour le rouge, λ est grande donc Dm est faible : le bleu est plus dévié que le rouge.

Exercice 1 : Stigmatisme approchée d'un dioptre plan

Un dioptre plan sépare deux milieux d'indice n et n'. On considère un point source A dans le milieu d'indice n. La normale au dioptre passant par A coupe le plan du dioptre en O. Un rayon issu de A est réfracté en I sur le dioptre. Le prolongement du rayon réfracté coupe la droite OA en un point A'. On note i et i' les angles formés par les rayons si incident et réfracté par rapport à la normale au dioptre en I.

1. Exprimer le chemin optique L entre A et A' en fonction de OA, OA', n, n', i et i'.

2. Montrer que la condition de stigmatisme est obtenue dans l'approximation paraxiale.

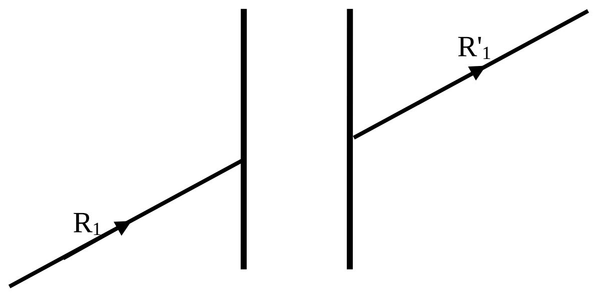
Quelle relation de conjugaison obtient-on alors ?

Exercice 2 : Lame à faces parallèles

Considérons une lame à faces parallèles, d'indice n_2, plongée dans l'air.

1- Soient un rayon incident R_1 et son conjugué R'_1. Montrer que ces deux rayons sont parallèles. Conclure sur la présence d'une lame.

2- Déterminer, dans les conditions de Gauss, la distance algébrique qui sépare un point objet A de son image A'.



3- Supposons qu'un poisson se trouve dans un aquarium en verre d'épaisseur **e** = 1cm. On assimile le poisson à un point A qui se trouve à 1 m de la paroi du verre dans l'eau. Donner la position de l'image A' pour un observateur se trouvant à l'horizontal du poisson.
On donne : $n_{air} = 1$, $n_{verre}=1.5$ et $n_{eau} = 1.33$.

4- Pour l'observateur, l'image est plus petite ou plus grosse que sa taille réelle ?

Exercice 3 : Fibre optique

Pour guider la lumière dans une direction donnée, on utiliseune fibre optique, constituée d'un cœur cylindrique de rayon a, d'indice $n_1 = 1.5$ et d'une gaine de rayon extérieur b, d'indice $n_2 = 1,4$.

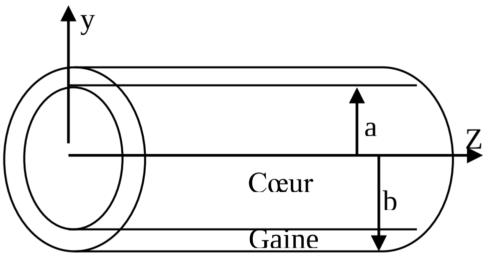
1- Un rayon incident pénètre dans la fibre au point I, sous un angle d'incidence i_0. Déterminer la condition sur i_0 pour qu'il y ait guidage dans la fibre.

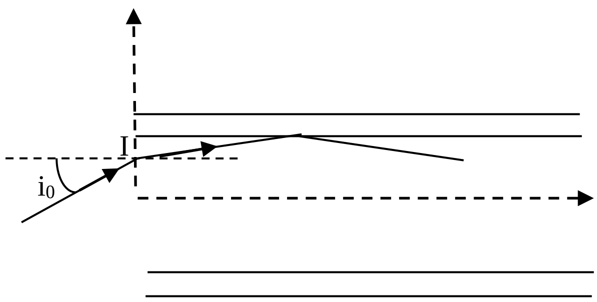
2- Supposons que l'on envoie dans la fibre une impulsion lumineuse sous la forme d'un faisceau conique convergent, de demi-angle au sommet i_s. Calculer le temps t_0 mis pour parcourir une distance L pour un rayon d'angle $i_0 = 0$, puis le temps t_1 pour un rayon d'angle i_s. Conclusion.

3- Pour améliorer le débit, on utilise des fibres optiques dont l'indice du cœur décroit avec l'axe y, ce qui permet de compenser partiellement les plus grandes longueurs de trajets, soit :

$$n(y) = n_1.\sqrt{1 - ky^2} \qquad \text{et} \qquad n\left(\pm\frac{a}{2}\right) = n_2$$

Exprimer k en fonction de a, n_1 et n_2.





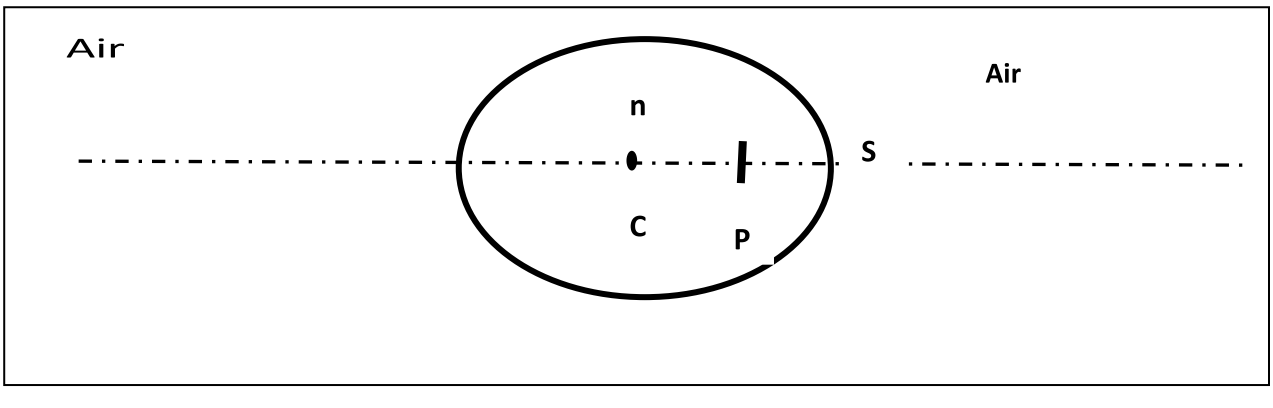
Exercice 4 : Grandissement d'un dioptre sphérique

Un poisson P se déplace à l'intérieur d'un aquarium sphérique de centre C, de rayon R et d'épaisseur négligeable. . Un observateur en O dans l'air examine le poisson qui se déplace sur l'axe CO de l'aquarium. On donne $n(eau) = \frac{4}{3}$

1. Exprimer le grandissement transverse γ(x) en fonction de x, n et R, lorsque le poisson se trouve à la distance x de la paroi de l'aquarium (x est mesuré sur l'axe CO).

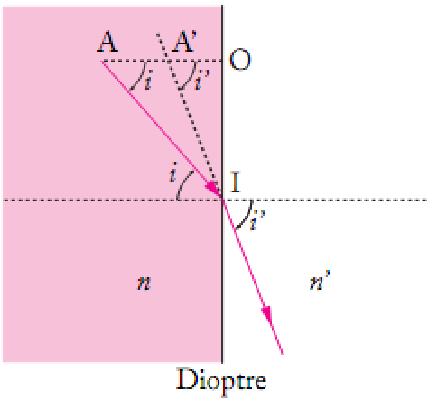
2. Tracer la courbe de variation de γ(x). Peut-on voir le poisson inversé ?

3. Quelles sont les positions extrêmes de l'image du poisson ?



<u>Solution Exercice 1 : Stigmatisme approchée d'un dioptre plan</u>

1.



Exprimons le chemin optique L entre A et A' :

$$L = n\,\mathrm{AI} - n'\,\mathrm{IA'}.$$

Le chemin optique entre I et A' est compté négativement car l'image A' est virtuelle. Dans les triangles AOI et A'OI, rectangles en O, on a :

$$\mathrm{AI} = \frac{\mathrm{OA}}{\cos i} \quad \text{et} \quad \mathrm{A'I} = \frac{\mathrm{OA'}}{\cos i'}$$

On a donc :

$$L = n\frac{\mathrm{OA}}{\cos i} - n'\frac{\mathrm{OA'}}{\cos i'}$$

2. Le principe de Fermat prévoit qu'un système optique est stigmatique si, pour deux points conjugués, le chemin est indépendant de l'angle i (et donc de i'). La dérivée de L par rapport à i est donc nulle :

$$\frac{dL}{di} = n\frac{\mathrm{OA}\sin i}{\cos^2 i} - n'\frac{\mathrm{OA'}\sin i'}{\cos^2 i'}\frac{di'}{di} = 0$$

i et i' sont liés par la loi de réfraction de Descartes : $n \sin i = n' \sin i'$.
En différentiant cette expression, on obtient : $n \cos i \, \mathrm{d}i = n' \cos i' \, \mathrm{d}i'$.

On remplace, dans $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}i}$, $\mathrm{d}i'$ par son expression en fonction de $\mathrm{d}i$. On obtient finalement :

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}i} = n^2 \sin i \cos i \left(\frac{\mathrm{OA}}{n \cos^3 i} - \frac{\mathrm{OA'}}{n' \cos^3 i'} \right)$$

À ce stade, $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}i} = 0$ quel que soit i, réaliserait le stigmatisme rigoureux, ce qui n'est manifestement pas possible ; en effet, on aurait alors :

$$\frac{n\overline{\mathrm{OA}}^2}{n'\overline{\mathrm{OA'}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{AI}}^3}{\overline{\mathrm{A'I}}^3}$$

quelle que soit la position de I ; or le rapport $\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{A'I}}$ n'est pas constant lorsque I se déplace le long du dioptre.
On recherche alors la condition de stigmatisme approché en se plaçant dans l'approximation paraxiale, où les angles i et i' sont faibles.

Au premier ordre, $\cos i \approx \cos i' \approx 1$ et $\sin i \approx i$, soit : $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}i} \approx ni\left(\frac{\mathrm{OA}}{n} - \frac{\mathrm{OA'}}{n'} \right) = 0$

Si $\frac{\mathrm{OA}}{n} = \frac{\mathrm{OA'}}{n'}$, on a alors $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}i} \approx 0$ quel que soit i.
On a donc établi une relation de conjugaison pour les points A et A'. Le dioptre plan réalise une condition de stigmatisme approché.

Solution Exercice 2 : Lame à faces parallèles

1- Une lame peut être considérée comme étant l'ensemble de deux dioptres plans D1 et D2. La loi de Snell Descartes peut alors être appliquée sur les deux dioptres, soit :

Dioptre D1 : $n_1.\sin(i_1) = n_2.\sin(i_2)$

Dioptre D2 : $n_2.\sin(i_2) = n_1.\sin(i_3)$

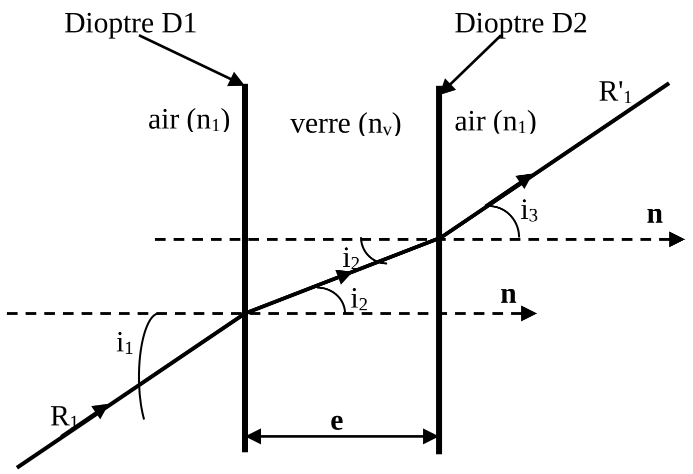
Soit :

$$n_1.\sin(i_1) = n_2.\sin(i_2) = n_1.\sin(i_3)$$

Ce qui donne : $i_1 = i_3$

L'angle d'incidence i_1 et l'angle d'émergence i_3 sont égaux : les rayons R_1 et R'_1 sont donc parallèles.

Conclusion : la présence de la lame fait translater les rayons parallèlement à elle même.



2- Le dioptre D1 crée une image A2 de l'objet A. La relation de conjugaison donne alors :

$$\frac{\overline{HA}}{n_1} = \frac{\overline{HA_2}}{n_2} \qquad \textbf{(1)}$$

Pour le dioptre D2, l'objet est A2 et l'image est A'. La relation de conjugaison donne :

$$\frac{\overline{H'A_2}}{n_2} = \frac{\overline{H'A'}}{n_1} \qquad \textbf{(2)}$$

Or : $\overline{H'A_2} = \overline{H'H} + \overline{HA_2}$ **(3)**

Si on injecte (3) dans (2), on trouve :

$$\frac{\overline{H'H}}{n_2} + \frac{\overline{HA_2}}{n_2} = \frac{\overline{H'A'}}{n_1}:$$

Cette relation permet d'obtenir $\frac{\overline{HA_2}}{n_2}$ **:**

$$\frac{\overline{HA_2}}{n_2} = \frac{\overline{H'A'}}{n_1} - \frac{\overline{H'H}}{n_2} \qquad \textbf{(4)}$$

Les équations (1) et (4) sont alors égales, d'où l'on déduit :

$$\frac{\overline{HA}}{n_1} = \frac{\overline{H'A'}}{n_1} - \frac{\overline{H'H}}{n_2}$$

Ou encore :

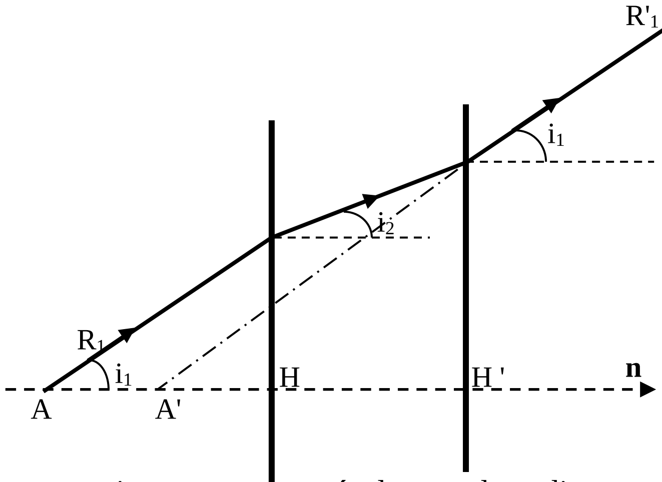
$$\frac{\overline{HA}}{n_1} = \frac{\overline{H'H}}{n_1} + \frac{\overline{HA'}}{n_1} - \frac{\overline{H'H}}{n_2}$$

Ce qui donne :

$$\frac{\overline{HA}}{n_1} - \frac{\overline{HA'}}{n_1} = \frac{\overline{H'H}}{n_1} - \frac{\overline{H'H}}{n_2}$$

Soit :

$$\frac{-\overline{AA'}}{n_1} = \frac{\overline{H'H}}{n_1}\left(\mathbf{1} - \frac{n_1}{n_2}\right)$$ Ou encore : $$\overline{\mathbf{AA'}} = \mathbf{e}\left(\mathbf{1} - \frac{n_1}{n_2}\right)$$



1- Pour un aquarium, nous avons également deux dioptres, mais trois milieux :
Dioptre D1 : eau-verre : $n_1.\sin(i_1) = n_2.\sin(i_2)$
Dioptre D2 : verre-air : $n_2.\sin(i_2) = n_3.\sin(i_3)$

Le dioptre D1 crée une image A2 de l'objet A. La relation de conjugaison donne : $\frac{\overline{HA}}{n_1} = \frac{\overline{HA_2}}{n_2}$

Ce qui donne : $\overline{\mathbf{HA_2}} = \mathbf{n_2}\frac{\overline{HA}}{n_1} = \mathbf{-112.78cm}$

Pour le dioptre D2, l'objet est A2 et l'image est A'. La relation de conjugaison donne :

$$\frac{\overline{H'A_2}}{n_2} = \frac{\overline{H'A'}}{n_3}$$

Ce qui donne : $\overline{\mathbf{H'A'}} = \mathbf{n_3}\frac{\overline{H'A_2}}{n_2} = \mathbf{-75.85cm.}$ Soit : $\overline{\mathbf{HA'}} = \mathbf{-74.85cm}$

Pour l'observateur, le poisson se trouve plus proche du verre.

2- Le grandissement latéral des dioptres plans est égale à +1 : la taille de l'image est égale à la taille de l'objet. Toutefois, puisque l'image est plus proche à l'œil de l'observateur, le poisson semble être plus grosse que sa taille réelle.

Solution Exercice 3 : Fibre optique

1- Pour qu'il y ait guidage dans la fibre, on devrait avoir réflexion totale c'est-à-dire l'angle i_1 doit être supérieur à l'angle limite du dioptre cœur-gaine, soit :

$\sin(i_1) \geq \frac{n_2}{n_1}$ (1) ➔ $i_1 \geq \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$.

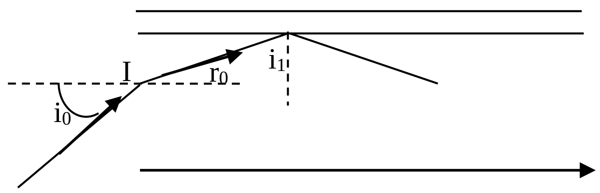
Or : $i_1 + r_0 = \pi/2$ et $\sin(i_0) = n_1.\sin(r_0)$

Donc : $\sin(i_0) = n_1.\sin(\pi/2 - i_1) = n_1.\cos(i_1)$ ➔ $\cos(i_1) = \sin(i_0)/n_1$ (2)

Sachant que $\cos^2(i_1) + \sin^2(i_1) = 1$

(1) et (2) donne alors : $\frac{\sin^2(i_0)}{n_1^2} + \frac{n^2_2}{n^2_1} \leq 1$

soit : $i_0 \leq \arcsin\left(\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right) = 32.6°$



2- Le rayon lumineux qui arrive avec un angle $i_0 = 0$ parcoure une distance L, et met donc un temps $t_0 = L/V = n_1L/C$.

Dans le second cas, la longueur à parcourir est plus grande : pour une longueur L selon Z, le rayon parcoure une distance $L/\cos(r_s)$ avec $\sin(i_s) = n_1.\sin(r_s)$. Donc :

$$t_1 = \frac{L}{V.\cos(rs)} = \frac{n_1 L}{C.\cos(rs)} = \frac{t_0}{\cos(rs)} > t_0$$

Conclusion : Le temps de parcours est donc plus long pour le rayon is que pour le rayon i_0 : L'information n'arrive pas en même temps à la fin de la fibre. Elle arrive pendant un temps $\Delta t = t1 - t0$ ➔ le débit d'informations'(quantité d'informations pendant une seconde) est donc limité car si on envoie deux impulsions pendant un temps inférieur à Δt, elles vont se chevaucher après propagation

3- L'expression n(y) est valable en $\pm$ a/2, et donc :

$$n(a) = n_1 . \sqrt{1 - k(a/2)^2} \; = \; n_2$$

on déduit facilement :

$$k = \frac{4}{a^2}\left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}\right).$$

Exercice 4 : Grandissement d'un dioptre sphérique

1. Le grandissement γ s'écrit : $\gamma = n\dfrac{\overline{SP'}}{\overline{SP}}$. Exprimons $\overline{SP'}$ en fonction de $\overline{SP} = x$. Avec $R = \overline{CS}$ et en appliquant la relation de conjugaison d'un dioptre sphérique avec origine au sommet, on obtient :

$$\frac{n}{\overline{SP}} - \frac{1}{\overline{SP'}} = \frac{n-1}{\overline{SC}} = \frac{1-n}{R}$$

Soit :

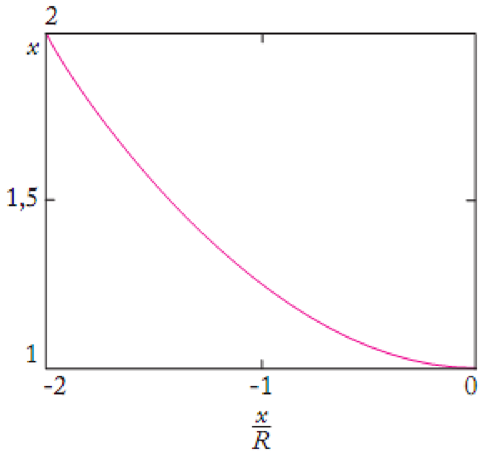
$$\overline{SP'} = \frac{1}{\dfrac{n}{x} - \dfrac{1-n}{R}}$$

On en déduit le grandissement $\gamma(x)$:

$$\gamma(x) = \frac{1}{1 + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{x}{R}}$$

2. La position du poisson est comprise entre $-2R < x < 0$.

De plus $1 - \dfrac{1}{n} > 0$. La courbe $\gamma(x)$ décroît de $\gamma(-2R) = 2$ à $\gamma(0) = 1$. Le poisson est toujours vu à l'endroit ; plus il est près de l'observateur, plus il est vu avec sa taille réelle.



3. On a $\overline{SP'} = \gamma\dfrac{\overline{SP}}{n}$.

Lorsque $x = -2R$, $\gamma = 2$, on a : $\overline{SP'} = 2\dfrac{(-2R)}{\dfrac{4}{3}} = -3R$.

Lorsque $x = 0$, on a $\overline{SP'} = 0$.

Le poisson semble bouger entre la paroi la plus proche de l'œil ($\overline{SP'} = 0$) et une paroi distante de $3R$ derrière cette paroi.

Université Mohamed Premier

Faculté des Sciences Oujda

Département de Physique

Filière SMIA – TD Optique Géométrique Série 3

Exercice 1 : Un Système optique est constitué de deux miroirs sphériques de même axe principal (voir Figure A.) :

- Le miroir concave M de sommet S et de rayon de courbure $R = SC = 100cm$;
- Le miroir M' de sommet S' et de rayon de courbure $R' = S'C'$ qui peut être soit concave ou convexe.

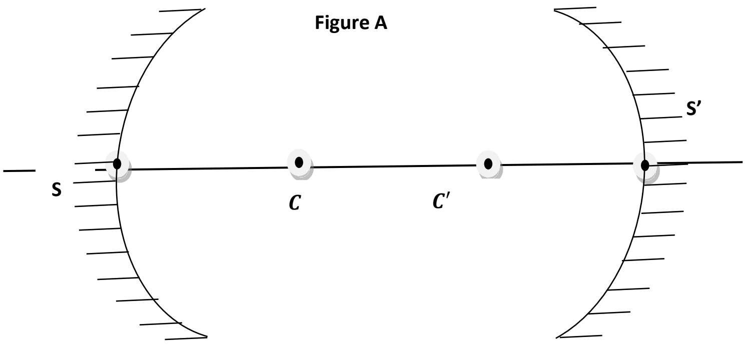
Un point lumineux A situé sur l'axe principal et repéré par $z = SA$ émet des rayons lumineux qui subissent une première réflexion sur le miroir M puis une seconde réflexion sur le miroir M'. L'image A' de A donnée par l'ensemble des deux miroirs est située au point S :

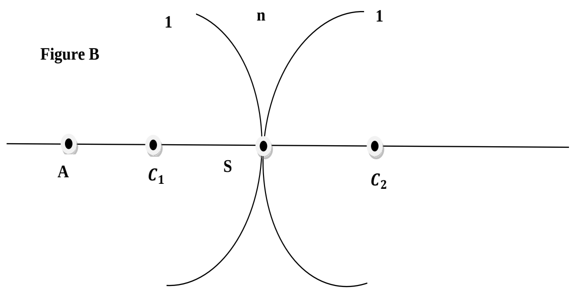
1) Représenter les variations de z en fonction de $x = SS'$ dans les deux cas suivants :

a) M' est un miroir convexe de 20cm de rayon

b) M' est un miroir concave de 20cm de rayon

2) Déterminer les valeurs de z correspondant à $z = 5m$ et les valeurs correspondantes du grandissement du système





Exercice 2

I) Soient n et n' les indices des milieux objet et image d'un dioptre sphérique de sommet S, un objet AB et son image $A'B'$ sont repérés par les abscisses : $\boldsymbol{x = \overline{SA}}$ **et** $\boldsymbol{x' = \overline{SA'}}$.

1) Quelle relation existe-t-il **entre** $\boldsymbol{x, x', n}$ **et** $\boldsymbol{n'}$ et la convergence $\boldsymbol{C}$ du dioptre sachant que

$$\boldsymbol{C = \frac{1}{f'}} \quad \boldsymbol{f' = distance\ focale\ image}$$

2) On déplace A de $\boldsymbol{x}$, quel déplacement $\boldsymbol{dx'}$ en résulte-t-il pour l'image $\boldsymbol{A'}$?

3) Exprimer le grandissement axial $\boldsymbol{g = \frac{dx'}{dx}}$ en fonction du grandissement linéaire $\boldsymbol{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}}$

Pour quelle position de l'objet A, ces deux grandissements sont-ils égaux ?

II) Dans le système de la figure B, la lumière traverse un dioptre sphérique de rayon $\boldsymbol{\overline{SC_1} = R_1}$, se réfléchit sur un miroir convexe de rayon $\overline{SC_2} = R_2$ et traverse à nouveau le dioptre sphérique. Soit **A** un point objet sur l'axe et **A'** son image dans le système, on pose $\boldsymbol{\overline{SA} = x}$ **et** $\boldsymbol{\overline{SA'} = x'}$

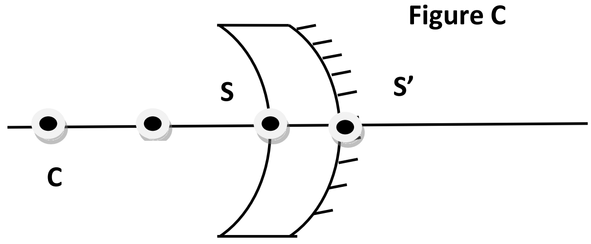
1) Établir une relation entre x, x', R_1, R_2 et n

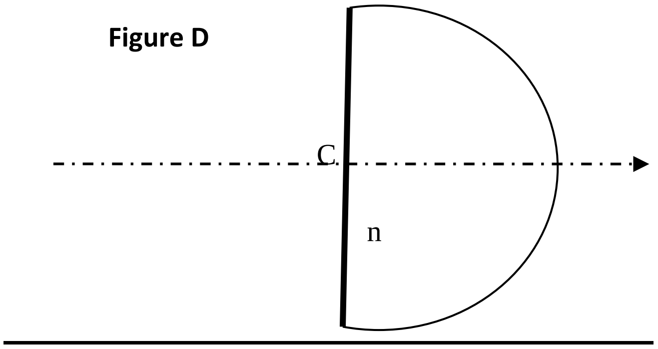
2) En déduire que le système est équivalent à un miroir sphérique unique dont on déterminera le sommet, le rayon de courbure en fonction de R_1, R_2 et n et la nature du miroir ?

Exercice 3 : Un dioptre sphérique concave de sommet S et de centre C est constitué d'une surface séparant deux milieux transparents le premier est l'air et le deuxième d'indice supérieur à 1.

1. Montrer que dans les conditions de Gauss, la formule de conjugaison pour ce dioptre s'écrit : $\boxed{\frac{n}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{n-1}{\overline{SC}}}$ ou A' est l'image d'un point objet A de l'axe.

2. Donner les positions des foyers objets F et image F′. Préciser la nature de ces foyers et faire le calcul pour n=1,5 et pour un rayon de 50cm
3. On associe au dioptre précédent un autre dioptre sphérique de sommet S'et de centre C' pour faire une lentille mince de distance focale de 25 cm. La lumière arrive du coté du premier dioptre (S, C). Déterminer le rayon du deuxième dioptre pour que :
   a- La lentille soit convergente,
   b- La lentille soit divergente
4. On forme un système catadioptrique à l'aide du dioptre précédent et d'un miroir sphérique de même rayon que le dioptre sommet S' et de centre C' (voir figure C): On pose $SS' = a = 25cm$
   Déterminer la position du point A qui est l'image de lui-même dans ce système
5. Un système optique est formé de deux lentilles minces, taillées dans le même verre, centrées sur le même axe, séparées par la distance e et ayant pour distances focales images f'_1 et f'_2
   a- Calculer la distance focale du système et la position de ses foyers et de ses plans principaux. Faire un dessin du système et dire si les foyers sont réels ou virtuels. On donne : $e = 4cm$, $f'_1 = 5\text{cm}$ et $f'_2 = 3\text{cm}$
6. Calculer la distance e en fonction de f'_1 et f'_2 pour que la distance focale du système demeure indépendante de n l'indice au voisinage immédiat d'une certaine couleur. Calculer et placer les éléments du système constitué par deux





Exercice 4: Lentille demi-boule

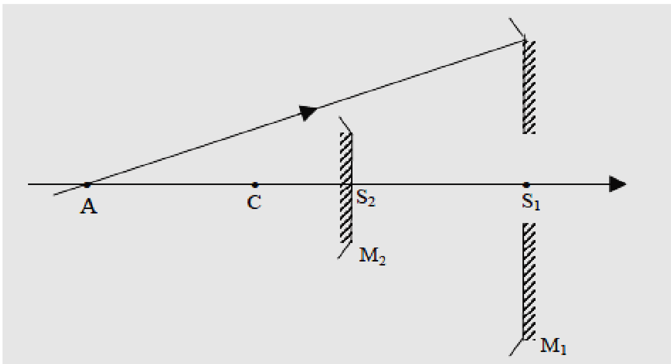
Considérons une lentille demi-boule de rayon R = CS = 5cm et d'indice n= 1.5, plongée dans l'air d'indice égale à 1(Voir figure D)

1- Donner le type de la lentille : convergente ou divergente ?

2- Dans l'approximation de Gauss :
2-1 Donner la relation de conjugaison avec origine au centre.
2-2 Déterminer la position du foyer image F′.
2-3 Déterminer la position du foyer objet F.
2-4 Exprimer le grandissement latéral.

Exercice 5 : Équivalence d'un système de deux miroirs et d'une lentille mince

On considère deux miroirs sphériques M_1 et M_2 de même centre C tels que M_1 est concave de rayon $CS_1 = 3R$ et M_2 est convexe de rayon $CS_2 = R$.
Une ouverture percée dans M_1, centrée sur l'axe principal commun des deux miroirs, permet à la lumière de se propager à droite de M_1.



1- Déterminer la relation de conjugaison en fonction de CA et CA' du système optique constitué par l'ensemble des deux miroirs M_1 et M_2. En déduire la position de l'image A' d'un objet A.
2- Déterminer le grandissement transversal de ce système.
3- Montrer que ce système est équivalent à une lentille mince dont on précisera le centre et la distance focale. Préciser la nature de cette lentille.

Exercice 6 : On considère une lentille demi boule en verre d'indice $n = 3/2$, de rayon R, de centre C et de sommet S son épaisseur e est égale à R

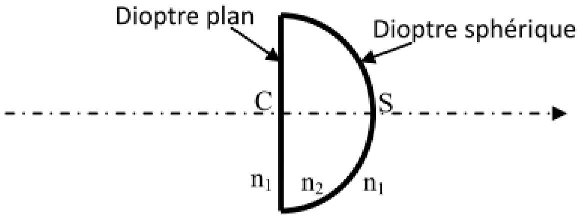
1) Déterminer le centre optique O de la lentille, en déduire les points nodaux N et N' du système.
2) Situer les plans principaux P et P' et les foyers objet et image F, F' de la lentille
3) Donner une construction géométrique pour un objet réel AB perpendiculaire à l'axe optique(CS).

Correction série 3

Exercice 4 -Demi boule

La lentille est constituée par deux dioptres :

- Dioptre plan : n_1-n_2 ;
- Dioptre sphérique de centre C et de sommet S : n_2-n_1.



1- Le type de la lentille concerne la partie courbe de la lentille (dioptre sphérique). Il est déterminé par l'une des deux méthodes suivantes :

Méthode 1 : On calcule la vergence V du dioptre sphérique :

- Si V est positive, alors la lentille est convergente ;
- Si V est négative, alors la lentille est divergente.

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{n_1 - n_2}}{\overline{\mathbf{SC}}}$$

Dans notre cas n1 <n2 et $\overline{\mathbf{SC}}$ est négative donc V > 0 ➔ lentille convergente

Méthode 2 : On détermine la position du foyer image F ' du dioptre sphérique :

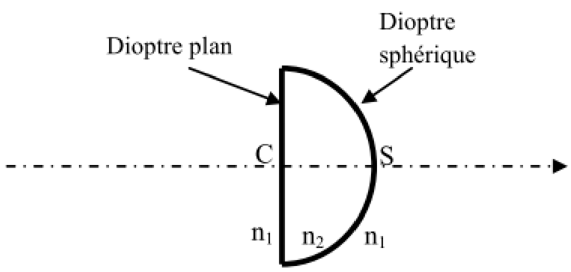
- Si $\overline{\mathbf{SF'}}$ est positive, la lentille est convergente ;
- Si elle est négative alors la lentille est divergente.

Le calcul de SF ' se fera dans la question 2, elle est positive donc la lentille est convergente.

Géométriquement, il suffit de prendre un faisceau parallèle à l'axe optique ; puis voir s'il converge ou diverge après réfraction.

2- Dans les conditions de Gauss, les différents angles sont faibles.

2-1 La relation de conjugaison est la formule qui donne la position de l'image A' d'un objet A situé sur l'axe optique.



Puisque la lentille est composée par deux dioptres, on peut dire donc que :

- le premier dioptre crée, à partir d'un objet A, une image A" ;

- puis le deuxième dioptre crée, à partir de l'objet A", une image A'.

soit :

Objet A $\xrightarrow{\text{Dioptre plan : } n_1\text{-}n_2}$ image A" : $\overline{CA"} = \frac{n_2}{n_1}\overline{CA}$ car A se trouve sur l'axe optique.

Objet A" $\xrightarrow{\text{Dioptre sphérique } n_2\text{-}n_1}$ image A' : $\frac{n_2}{\overline{CA'}} - \frac{n_1}{\overline{CA"}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{CS}}$

En remplaçant, dans cette dernière relation, $\overline{CA"}$ par $\frac{n_2}{n_1}\overline{CA}$, on tire la relation de conjugaison de la lentille demi-boule :

$$\boxed{\frac{n_2}{\overline{CA'}} - \frac{n_1^2}{n_2\overline{CA}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{CS}}}$$

2-2 le foyer image F' peut être déterminé à partir de la relation de conjugaison, sachant qu'un objet A se trouvant à l'infinie, son image A' se trouve au foyer image F' :

$$\frac{n_2}{\overline{CF'}} - \frac{n_1^2}{\infty} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{CS}}, \text{ ce qui donne : } \boxed{\overline{CF'} = \frac{n_2}{n_2 - n_1}\overline{CS}}$$

2-3 le foyer objet F peut être déterminé à partir de la relation de conjugaison, sachant qu'un objet A se trouvant sur le foyer F, son image A' se trouve à l'infini :

$$\frac{n_2}{\infty} - \frac{n_1^2}{n_2\overline{CF}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{CS}}, \text{ ce qui donne : } \boxed{\overline{CF} = \frac{n_1^2}{n_2}\frac{\overline{CS}}{n_1 - n_2}}$$

2-4 Pour exprimer le grandissement latéral, on procède comme précédemment :

Objet AB $\xrightarrow{\text{Dioptre plan : } n_1\text{-}n_2}$ image A"B" : $\gamma_1 = \frac{\overline{A"B"}}{\overline{AB}} = 1$ car AB est parallèle au dioptre plan.

Objet A"B" $\xrightarrow{\text{Dioptre sphérique } n_2\text{-}n_1}$ image A'B' : $\gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A"B"}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA"}}$

Le grandissement de la lentille demi-boule est

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \gamma_1\gamma_2 = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA"}}$$

Or : $\overline{CA"} = \frac{n_2}{n_1}\overline{CA}$, ce qui donne :

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \gamma_1\gamma_2 = \frac{n_1}{n_2}\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}}$$

Exercice 5

<u>Exercice 5</u> :

1- Le système est constitué de deux miroirs M_1 et M_2:

$$A \xrightarrow{M_1} A_1 \xrightarrow{M_2} A'$$

$$A \xrightarrow{M_1} A_1 : \frac{1}{\overline{CA_1}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS_1}} \qquad (1)$$

$$A_1 \xrightarrow{M_2} A' : \frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA_1}} = \frac{2}{\overline{CS_2}} \qquad (2)$$

(2) – (1) donne :

$$\frac{1}{\overline{CA'}} - \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS_2}} - \frac{2}{\overline{CS_1}}$$

D'où l'on tire la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{CA'}} - \frac{1}{\overline{CA}} = 2\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{3R}\right] = \frac{4}{3R} \qquad (3)$$

On tire facilement la position de A' :

$$\frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{1}{\overline{CA}} + \frac{4}{3R} \quad \Rightarrow \quad \overline{CA'} = \frac{3R\,\overline{CA}}{3R + 4\,\overline{CA}}$$

2- Grandissement transversal :

On a
$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA_1}}{\overline{CA}}$$

$$\gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA_1}}$$

soit
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \gamma_2\gamma_1 = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \frac{3R}{3R + 4\,\overline{CA}}$$

3- Equivalence avec une lentille :

On remarque bien que la relation (3) est identique à la relation de conjugaison d'une lentille mince de centre optique O = C et de distance focale :

$$f' = \overline{CF'} = \frac{3}{4}R$$

Puisque f ' >0 alors la lentille est convergente.

Université Mohamed Premier

Faculté des Sciences Oujda

Département de Physique

Filière SMIA – TD Optique Géométrique Série 3

Exercice 1 : Un Système optique est constitué de deux miroirs sphériques de même axe principal (voir Figure A.) :

- Le miroir concave Mde sommet S et de rayon de courbure $R = SC = 100cm$;
- Le miroir M' de sommet S' et de rayon de courbure $R' = S'C'$ qui peut être soit concave ou convexe.

Un point lumineux A situé sur l'axe principal et repéré par $z = SA$ émet des rayons lumineux qui subissent une première réflexion sur le miroir M puis une seconde réflexion sur le miroir M'. L'image A' de A donnée par l'ensemble des deux miroirs est située au point S :

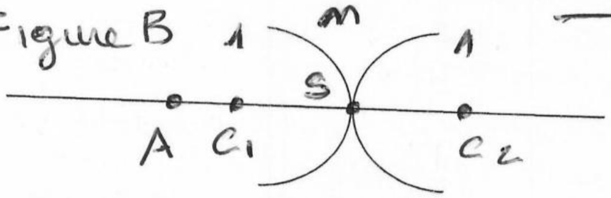
1) Représenter les variations de z en fonction de $x = SS'$ dans les deux cas suivants :

a) M' est un miroir convexe de 20cm de rayon

b) M' est un miroir concave de 20cm de rayon

2) Déterminer les valeurs de z correspondant à $z = 5m$ et les valeurs correspondants du grandissement du système

Figure B



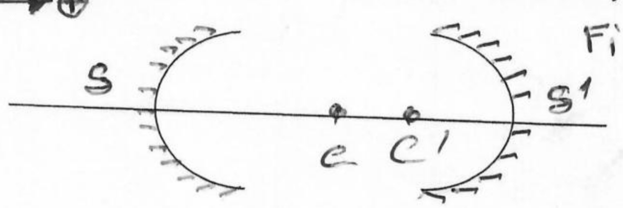


Figure A

Exercice 2

I) Soient $n\ et\ n'$ les indices des milieux objets et image d'un dioptre sphérique de sommet Sun objet AB et son image $A'B'$ sont repérés par les abscisses : $x = \overline{SA}\ et\ x' = \overline{SA'}$.

1) Quelle relation existe-t-il entre $x, et\ x', n\ et\ n'$ te la convergence Cdu dioptre sachant que $C = \frac{1}{f'}$

$f' = distance\ focale\ image$

2) On déplace A de x , quel déplacement dx' en résulte t-il pour l'image A' ?

3) Exprimer le grandissement axial $g = \frac{dx'}{dx}$ en fonction du grandissement linéaire $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

Pour quelle position de l'objet$A$, ces deux grandissements sont ils égaux ?

II) Dans le système ci contre (voir figure B), la lumière traverse un dioptre sphériques de rayon $\overline{SC_1} = R_1$, se réfléchit sur un miroir convexe de rayon $\overline{SC_2} = R_2$ et traverse à nouveau le dioptre sphérique. Soit A un point objet sur l'axe et A' son image dans le système, on pose $\overline{SA} = x\ et\ \overline{SA'} = x'$

1) Établir une relation entre x, x', R_1, R_2 et n

2) En déduire que le système est équivalent à un miroir sphérique unique dont on déterminera le sommet, le rayon de courbure en fonction de R_1, R_2 et n et la nature du miroir ?

Exercice 3 : Un dioptre sphérique concave de sommet s et de centre C est constitué d'une surface séparant deux milieux transparents le premier est l'air et le deuxième d'indice supérieur à 1.

1. Montrer que dans les conditions de Gauss, la formule de conjugaison pour ce dioptre s'écrit : $\boxed{\frac{n}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{n-1}{\overline{SC}}}$ ou Donner les positions de foyers Objets F et image F'. Préciser la nature de ces foyers et faire le calcul pour n=1,5 et pour un rayon de 50cm
2. On associe au dioptre précédents un autre dioptre sphériques de sommet S' et de centre pour faire une lentille mince de distance focale de 25 cm. La lumière arrive du coté du premier dioptre (S, C). Déterminer le rayon du deuxième dioptre pour que :

   a- La lentille soit convergente,

   b- La lentille soit divergente

3. On forme un système catadioptrique à l'aide du dioptre précédent et d'un miroir sphérique de même rayon que le dioptre sommet S' et de centre C' (voir figure C): On pose $SS' = a = 25cm$
   Déterminer la position du point A qui est l'image de lui-même dans ce système
4. Un système optique est formé de deux lentilles minces, taillées dans le même verre, centrées sur le même axe, séparées par la distance e et ayant pour distances focales images f'_1 et f'_2
   a- Calculer la distance focale du système et la position de ses foyers et de ses plans principaux. Faire un dessin du système et dire si les foyers sont réels ou virtuels. On donne : $e = 4cm, f'_1 = 5\text{cm}$ et $f'_2 = 3\text{cm}$
5. Calculer la distance e en fonction de f'_1 et f'_2 pour que la distance focale du système demeure indépendante de n l'indice au voisinage immédiat d'une certaine couleur. Calculer et placer les éléments du système constitué par deux lentilles identiques de $5cm$ de distance focales pour la couleur considérée

Figure D

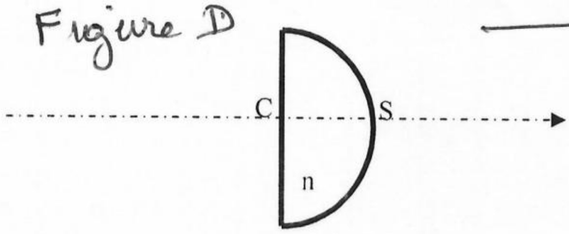
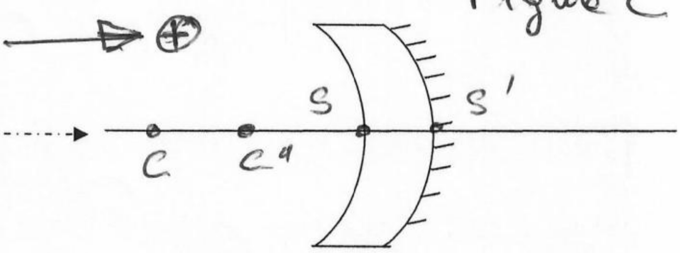


Figure C



Exercice 4: Lentille demi-boule

Considérons une lentille demi-boule de rayon R = CS = 5cm et d'indice n= 1.5, plongée dans l'air d'indice égale à 1(Voir figure D)

1- Donner le type de la lentille : convergente ou divergente ?

2- Dans l'approximation de Gauss :

2-1 Donner la relation de conjugaison avec origine au centre.
2-2 Déterminer la position du foyer image F'.
2-3 Déterminer la position du foyer objet F.
2-4 Exprimer le grandissement latéral.

Exercice 5 : Équivalence d'un système de deux miroirs et d'une lentille mince

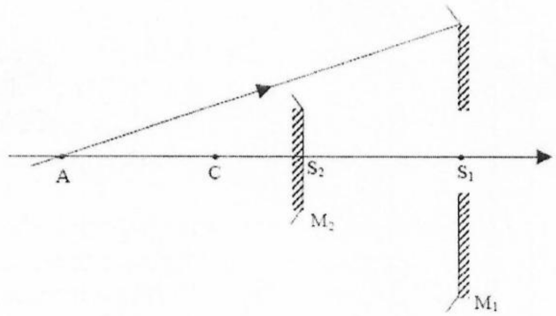
On considère deux miroirs sphériques M_1 et M_2 de même centre C tels que M_1 est concave de rayon $CS_1 = 3R$ et M_2 est convexe de rayon $CS_2 = R$.

Une ouverture percée dans M_1, centrée sur l'axe principal commun des deux miroirs, permet à la lumière de se propager à droite de M_1.

1- Déterminer la relation de conjugaison en fonction de CA et CA' du système optique constitué par l'ensemble des deux miroirs M_1 et M_2. En déduire la position de l'image A' d'un objet A.

2- Déterminer le grandissement transversal de ce système.

3- Montrer que ce système est équivalent à une lentille mince dont on précisera le centre et la distance focale. Préciser la nature de cette lentille.

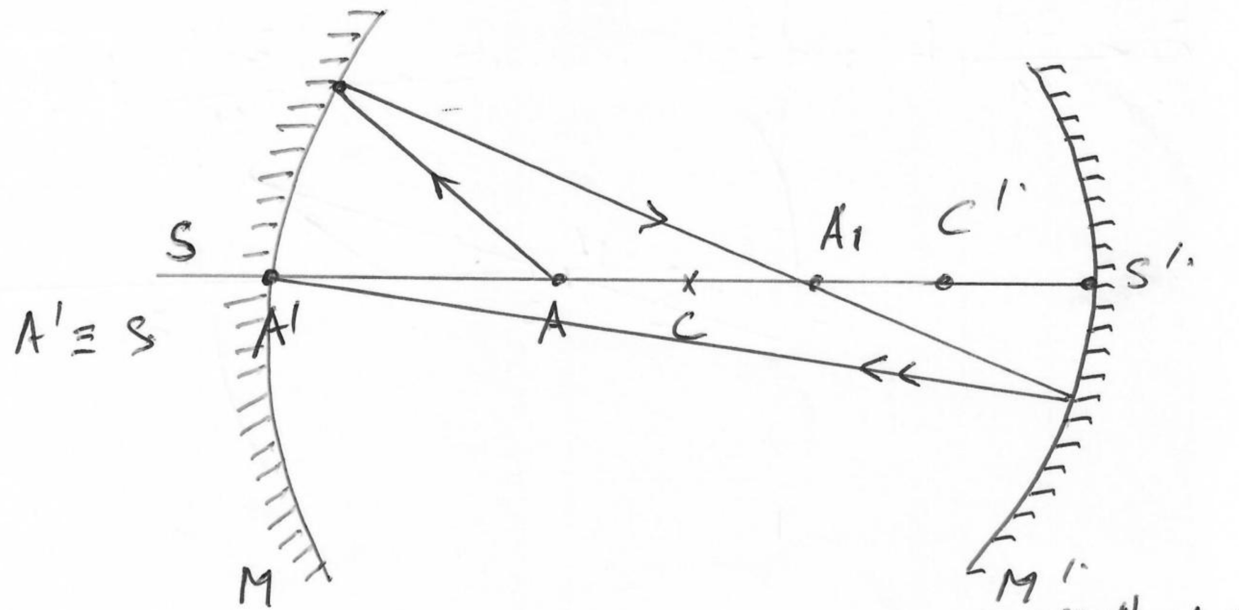


Exercice 6

On considère une lentille demi boule en verre d'indice $n = 3/2$, de rayon R, de centre C et de sommet S son épaisseur e est égale à R(voir figure)

1) Déterminer le centre optique O de la lentille, en déduire les points nodaux N et N' du système.
2) Situer les plans principaux P et P' et les foyers objet et image F, F' de la lentille
3) Donner une construction géométrique pour un objet réel AB perpendiculaire à l'axe optique(CS).

Exercice 1 : M.S : Miroir sphérique



objet A $\xrightarrow{M.S.(M)}$ Image Intermediaire A_1 $\xrightarrow{M.S(M')}$ $A' \equiv S$

(a) le Miroir sphérique M est considérée comme concave

On a : $A \xrightarrow{M} A_1 \xrightarrow{M'} A' \equiv S$

(eq 1) $\dfrac{1}{SA} + \dfrac{1}{SA_1} = \dfrac{2}{SC} = \dfrac{2}{R}$ (Formule de Conjugaison relative à M au sommet S)

(eq 2) $\dfrac{1}{S'A_1} + \dfrac{1}{S'S} = \dfrac{2}{S'C'} = \dfrac{2}{R'}$ (F.C. M' au sommet S')

avec $S'A_1 = S'S + \bar{S}A_1 = \bar{S}A_1 - x$; On pose $SS' = x$

(eq 1) devient $\dfrac{1}{SA_1} + \dfrac{1}{SA} = \dfrac{2}{R} \Rightarrow \dfrac{1}{SA_1} = \dfrac{2}{R} - \dfrac{1}{Z}$; $SA = Z$

$$\frac{1}{SA_1} = \frac{2Z - R}{R \cdot Z} \quad \text{(eq 3)}$$

(eq 2) devient $\dfrac{1}{\bar{S}A_1 - x} + \dfrac{1}{-x} = \dfrac{2}{R'} \Rightarrow \dfrac{1}{\bar{S}A_1 - x} = \dfrac{2}{R'} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{R' + 2x}{R'x}$

(eq 4)

On obtient alors $\overline{SA_1} = \frac{Rz}{2z - R}$ (*)

et $\overline{SA_1} = \frac{R'x}{R' + 2x} + x$

$$\overline{SA_1} = \frac{2x(R' + x)}{R' + 2x} \quad (**)$$

(*) et (**) conduisent à :

$$z = \frac{2Rx(x + R')}{4x(x + R') - R(2x + R')}$$

$z = f(x)$

On démontre que $\frac{dz}{dx}$ a le même signe que

$-2R^2(2x^2 + 2R'x + R'^2)$

Il s'agit d'étudier la variation de la fonction $z(x)$.

$-2R^2(2x^2 + 2R'x + R'^2)$ est donc négative pour toutes les valeurs de $x \in]0, +\infty[$.

Le Grandissement γ du système est donné par

$$\gamma = \gamma_M \cdot \gamma_{M'}$$

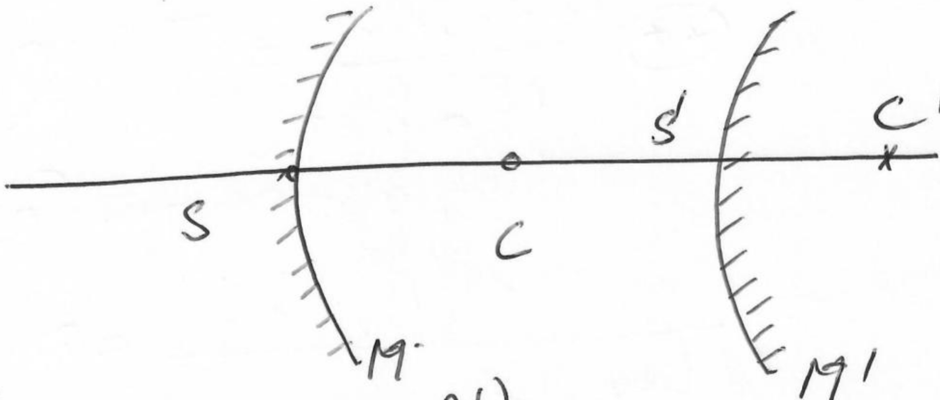
$\gamma_M = \frac{\overline{A_1B'}}{\overline{AB}}$ dans ce cas $\gamma_M = \frac{-\overline{SA_1}}{\overline{SA}}$.

$$\gamma_{M'} = -\frac{\overline{S'S}}{\overline{S'A_1}}$$

donc $\gamma = \frac{-\overline{SA_1}}{\overline{SA}} \cdot \frac{-\overline{S'S}}{\overline{S'A_1}}$

$$\gamma = \frac{-R(R'+2x)}{R'(2z-R)}$$ (eq ***)

b/ M' est un Miroir Convexe

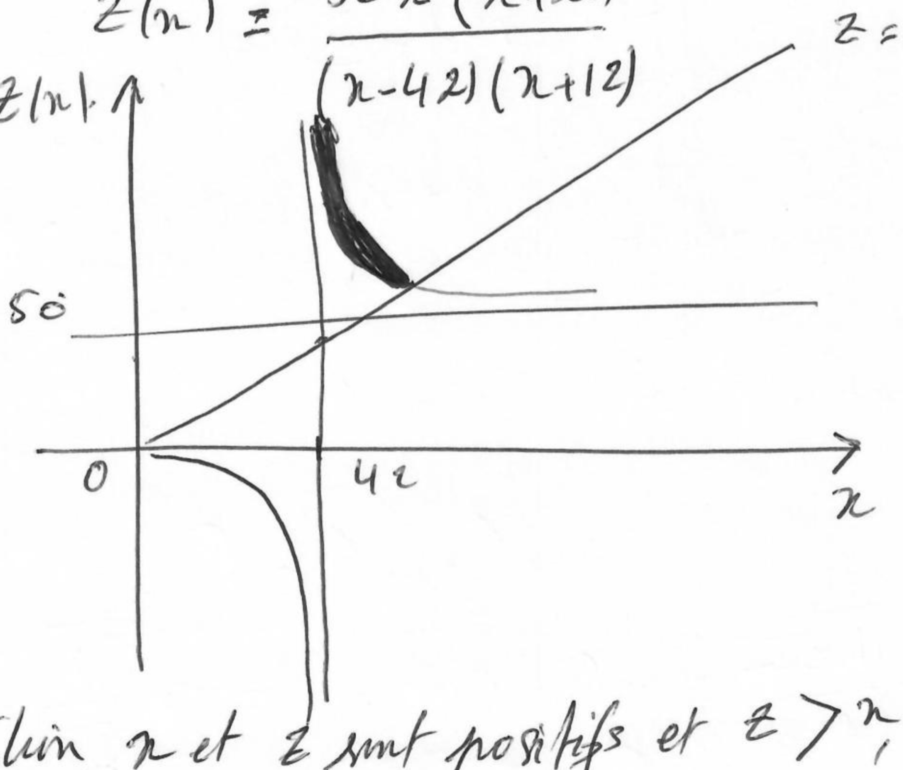


L'équation

$$z = \frac{2Rx(x+R')}{4x(x+R')-R(2x+R')}$$

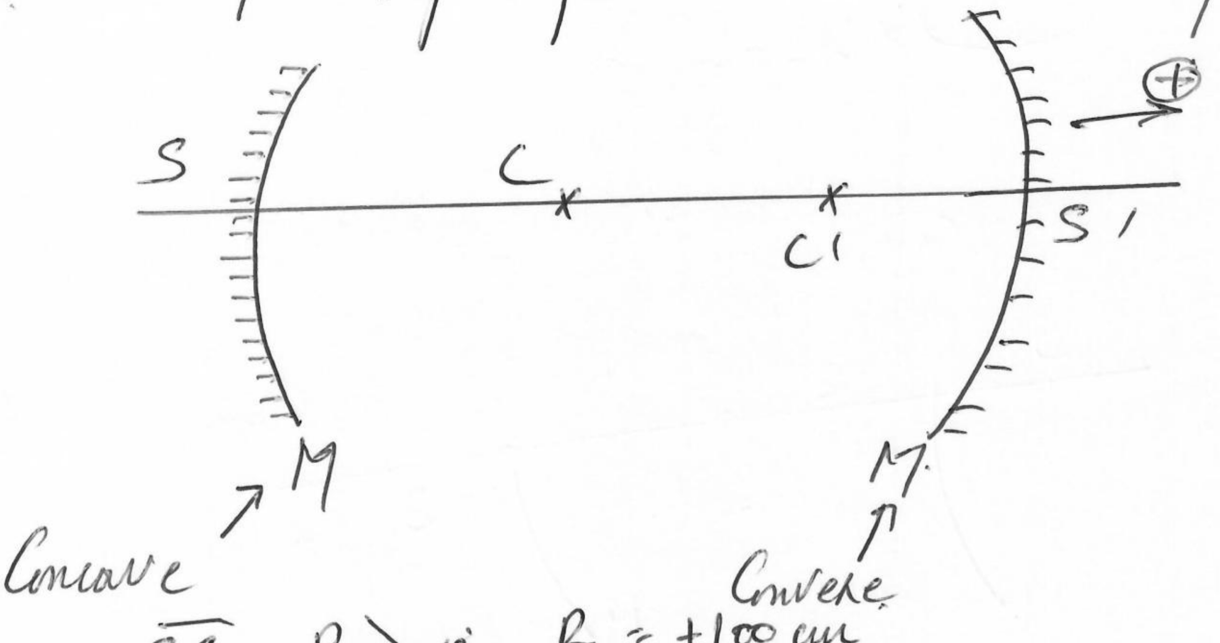
$R = 100$ cm, $R' = 20$ cm $\Rightarrow z(x) = \dfrac{200x(x+20)}{4x(x+20)-100(2x+20)}$

$$z(x) = \frac{50x(x+20)}{(x-42)(x+12)}$$



Par définition x et z sont positifs et z > x ; il en résulte que seule la partie en traits pleins de la courbe qui répond à la question

b) M' = Miroir sphérique concave



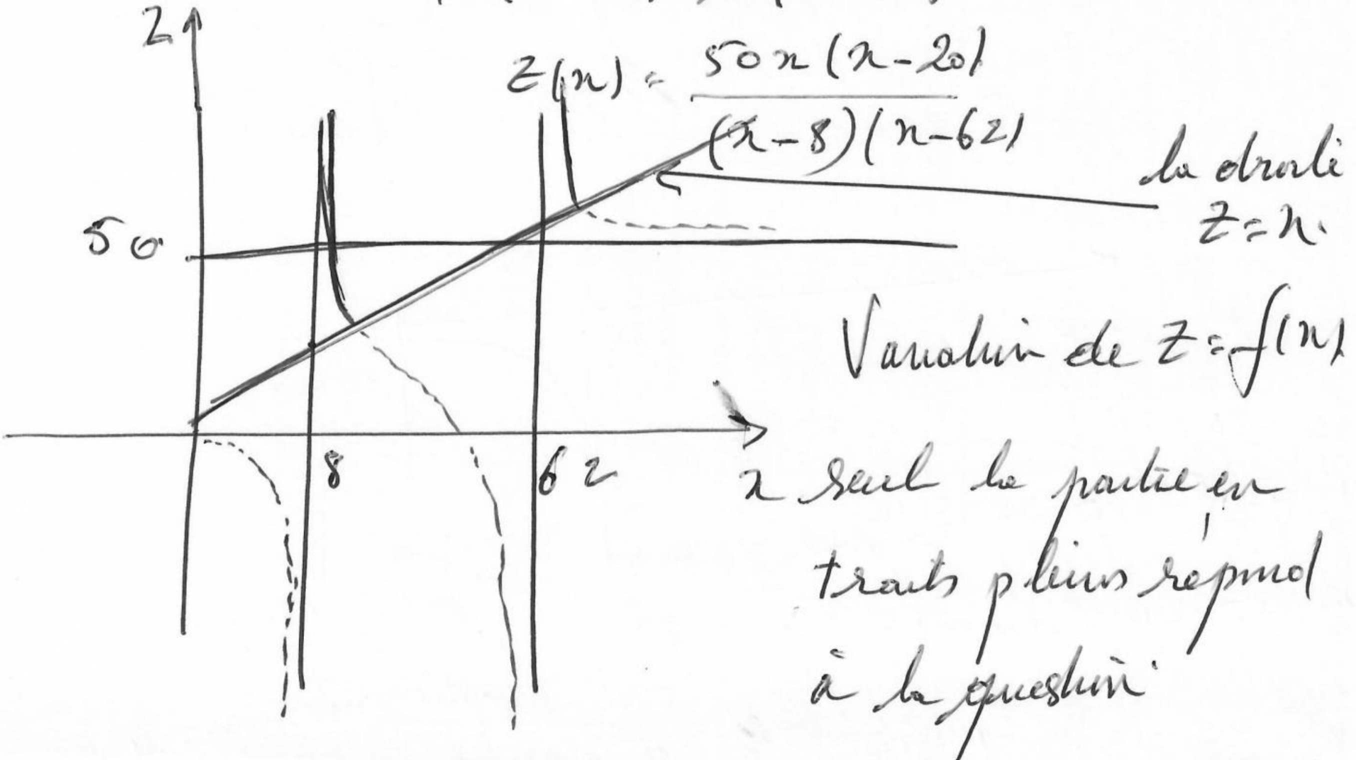
$\overline{SC} = R > 0 \quad R = +100\ \text{cm}$

$\overline{S'C} = R' < 0 \quad R' = -20\ \text{cm}$

l'équation $z = \dfrac{2Rx(x+R')}{4x(x+R') - R(2x+R')}$

$$= \frac{200\,x(x-20)}{4x(x-20) - 100(2x-20)} = \frac{50\,x(x-20)}{x^2 - 70x + 500}$$

$$z(x) = \frac{50\,x(x-20)}{(x-8)(x-62)}$$



Variation de $z = f(x)$

Seule la partie en traits pleins répond à la question

2°/ $z = 5\,m = 500$ cm

a/ le cas où le miroir est concave $z = f(x) = \frac{50x(x+20)}{x^2 - 30x - 500}$

$z = 500$ cm, la position x du sommet S' de M'

est donnée par les solutions de l'équation

$$9x^2 - 320x - 5000 = 0$$

ce qui donne une seule valeur $x_0 = 47{,}3$ cm

dans les conditions $\gamma = \frac{R(R' + 2x_0)}{R'(2z - R)} = 0{,}64$ à vérifier

$R' = 20$ cm $x_0 = 47{,}3$ cm

$R = 100$ cm $z = 500$ cm

b/ M' miroir concave

dans le cas x est solution de l'équation

$$9x^2 - 680x + 5000 = 0$$

cas concave $z = \frac{50x(x-20)}{x^2 - 70x + 500}$

Les solutions sont $x_1 = 8{,}25$ cm, $x_2 = 67{,}3$ cm

Les grandissements correspondants à x_1 et x_2

sont $\gamma_1 = -0{,}019$ et $\gamma_2 = 0{,}64$.

Exercice N° 2

1°/. Relation de Conjugaison d'un D.S

$$\frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n'-n}{\overline{SC}}$$

lorsque l'objet $A \longrightarrow \infty$ $A' \longrightarrow F'$ le point principal image du D.S est confondu avec S

$$\frac{n'}{f'} = \frac{n'-n}{\overline{SC}} = n'C.$$

En posant $x = \overline{SA}$, $x' = \overline{SA'}$ $\quad \frac{n'}{x'} - \frac{n}{x} = n'C.$

2°) Lorsque l'objet se deplace de dx petit, l'image subit alors un déplacement dx', la Convergence C est Cst

En differenciant $\frac{n'}{x'} - \frac{n}{x} = n'C.$

$$\Rightarrow -\frac{n'}{x'^2} \cdot dx' + \frac{n}{x^2} dx = 0$$

donc $\quad dx' = \frac{n\,x'^2}{n'\,x^2} dx$

3°) Grandissement axial g.

d'après $dx' = \frac{n\,x'^2}{n'\,x^2} \cdot dx \quad g = \frac{dx'}{dx} = \frac{n\,x'^2}{n'\,x^2}$

Grandissement lineaire γ

pour un D.S $\gamma = \frac{n}{n'} \frac{x'}{x} \Rightarrow g = \frac{n'}{n} \gamma^2.$

Remarque : le grandissement axial est toujours $\oplus$

Position de l'objet A lorsque $\gamma = g$.

$\gamma = g \Rightarrow x = x'$

Pour $x = x' \Rightarrow \overline{SA} = \overline{SA'} = \overline{SC}$

le grandissement γ et g sont égaux lorsque l'objet A est au centre C du dioptre sphérique

dans cette position, nous avons $\gamma = g = \frac{n}{n'}$

II/ $\underset{n=1}{A} \xrightarrow[(S, C_1)]{D.S} \underset{n}{A_0} \xrightarrow[(S, C_2)]{M.} A_1$

$\frac{1}{SA} - \frac{n}{SA_0} = \frac{1-n}{SC_1}$ (1)

$\frac{1}{SA_0} + \frac{1}{SA_1} = \frac{2}{SC_2}$ (2)

soit enfin A' l'image de l'objet A_1 à travers le dioptre sphérique dans le sens de la lumière reflechi

$\frac{n}{SA_1} - \frac{1}{SA'} = \frac{n-1}{SC_1}$ (3)

il faut éliminer A_0 et A_1 entre les relations (1), (2) et (3)

(1) $+ n \times$ (2) $\Rightarrow \left(\frac{1}{SA} - \frac{n}{SA_0}\right) + n\left[\frac{1}{SA_0} + \frac{1}{SA_1}\right] = \frac{1-n}{SC_1} + \frac{2.n}{SC_2}$

eq 4 $\quad \frac{1}{SA} + \frac{n}{SA_1} = \frac{1-n}{SC_1} + \frac{2n}{SC_2}$

eq 3 $\quad \frac{n}{SA_1} - \frac{1}{SA'} = \frac{n-1}{SC_1}$

(eq 4) - (eq 3) $\Rightarrow$ $\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'} = \frac{2(1-n)}{SC_1} + \frac{2n}{SC_2}$ (*) page 8

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{2(1-n)R_2 + 2nR_1}{R_1R_2}$$

2°) Miroir équivalent

d'après l'équation (*) on remarque que le système est équivalent à un miroir sphérique de sommet S et de centre C tel $\frac{2}{SC} = \frac{2(1-n)}{SC_1} + \frac{2n}{SC_2}$

Rayon de courbure du miroir équivalent $\overline{SC} = R$.

Nature du miroir équivalent $R = \frac{R_1R_2}{(1-n)R_2+nR_1}$

il s'agit de trouver le signe de R

$1-n < 0$; $R_1 < 0$; $R_2 < 0$ donc $R > 0$ $R_2 > 0$

par conséquent le miroir sphérique équivalent est convexe.

Exercice 3

1°) Formule de conjugaison

Un rayon issu du point objet A, rencontre le dioptre au point I avec un angle d'indice i, il se réfracte avec un angle r dans le milieu d'indice n, $r<i$ car $n>1$.

L'image A' est l'intersection entre l'axe optique et le prolongement du rayon réfracté. Dans les triangles CIA et CIA' on a :

$$\frac{\overline{CA}}{\sin i}=\frac{\overline{IA}}{\sin \omega}\ ;\ \frac{\overline{CA'}}{\sin r}=\frac{\overline{IA'}}{\sin \omega}$$

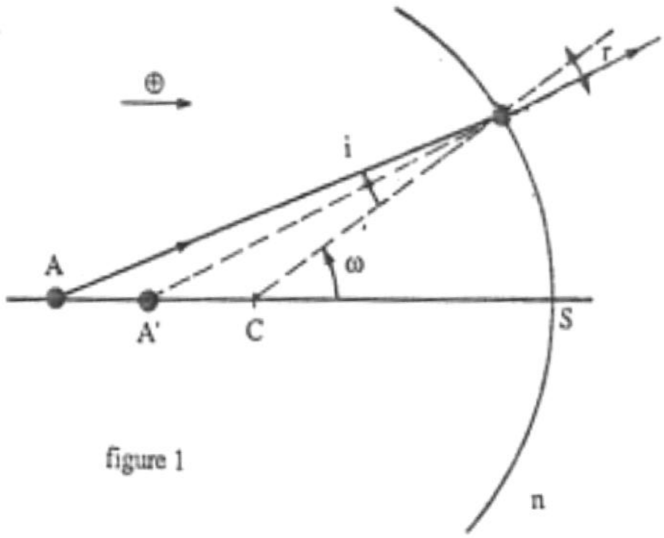


figure 1

En faisant le rapport :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}}\times\frac{\sin r}{\sin i}=\frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}}$$

Or, la loi de Descartes donne $\sin i = n \sin r$

D'où $$1\,.\frac{\overline{CA}}{\overline{IA}}=n\,.\frac{\overline{CA'}}{\overline{IA'}} \qquad [2]$$

Cette quantité se conserve à la traversé d'un dioptre : C'est l'invariant fondamental. Les conditions de Gauss entraînent que I est proche de S, nous avons donc d'après [2]

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{SA}}=n\,.\frac{\overline{CA'}}{\overline{SA'}}$$

$$\frac{\overline{SA}-\overline{SC}}{\overline{SA}}=n\,.\frac{\overline{SA'}-\overline{SC}}{\overline{SA'}}$$

Par conséquent : $$\frac{n}{\overline{SA'}}-\frac{1}{\overline{SA}}=\frac{n-1}{\overline{SC}}$$

Position des foyers :

◆ Le foyer objet F s'obtient lorsque A' est à l'infini : $\overline{SF} = \dfrac{\overline{SC}}{1-n}$

◆ Le foyer image F' s'obtient lorsque A est à l'infini : $\overline{SF'} = \dfrac{n}{n-1}\ \overline{SC}$

D'après le sens positif (figure 1) $\overline{SC} > 0$, or $n > 1$ par conséquent : $\overline{SF} > 0$; $\overline{SF'} < 0$

Le foyer objet se trouve dans l'espace objet virtuel, il est donc virtuel (figure 2).
Le foyer image se trouve dans l'espace image virtuel, il est donc virtuel (figure 2).
Lorsque les deux foyers sont virtuels, le dioptre sphérique est divergent.

A.N : $\overline{SC} = -50$ cm ; $n = 1{,}5$

$$\overline{SF} = 100 \text{ cm} ;\quad \overline{SF'} = -150 \text{ cm}$$

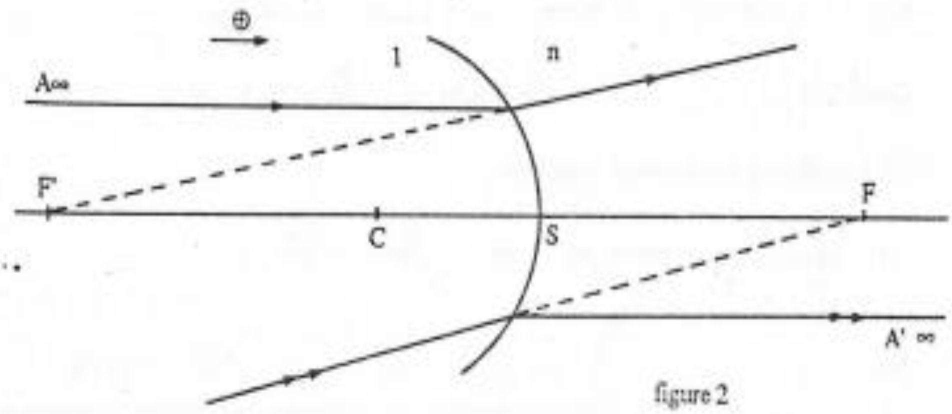


figure 2

2°) Nous cherchons la formule de conjugaison de la lentille mince, en remarquant qu'elle est l'association de deux dioptres sphériques de rayons SC et $S'C'$. L'indice du milieu intermédiaire est n.

◆ Un point objet A a pour image A_0 à travers le 1er dioptre : $\dfrac{1}{\overline{SA}} - \dfrac{n}{\overline{SA_0}} = \dfrac{1-n}{\overline{SC}}$ [3]

◆ Le point A_0 est un objet par rapport au 2ème dioptre ; son image est A' telle que :

$$\frac{n}{\overline{S'A_0}} - \frac{1}{\overline{S'A'}} = \frac{n-1}{\overline{S'C'}} \qquad [4]$$

La lentille est supposée mince : $S - S' = 0$

En ajoutant [3] et [4] : $$\frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA'}} = (n-1)\left(\frac{1}{\overline{S'C'}} - \frac{1}{\overline{SC}}\right)$$

Détermination du rayon du 2ème dioptre : Lorsque A tend vers l'infini, $A' = F'$

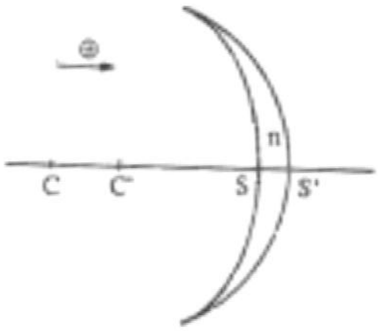
$$-\frac{1}{\overline{OF'}} = (n-1)\left(\frac{1}{\overline{S'C'}} - \frac{1}{\overline{SC}}\right)$$

Soit :

$$\boxed{\overline{S'C'} = \frac{(n-1)\,\overline{OF'}\,.\,\overline{SC}}{(n-1)\,\overline{OF'} - \overline{SC}}}$$

a) La lentille mince est convergente. Dans ce cas sa distance focale image est positive (en supposant que le sens positif est confondu avec le sens de propagation de la lumière).

A.N : $\overline{OF'} = 25$ cm ; $\overline{SC} = -50$ cm ; $n = 1{,}5$



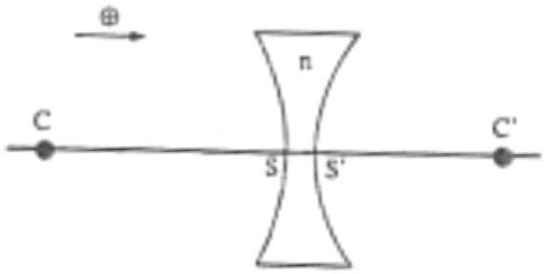
on trouve $\boxed{\overline{S'C'} = -10 \text{ cm}}$

$\overline{S'C'} < 0$, d'où le schéma.

C'est un ménisque à bords minces.

b) La lentille mince est divergente. Dans ce cas sa distance focale image est négative.

A.N : $\overline{OF'} = -25$ cm ; $\overline{SC} = -50$ cm ; $n = 1{,}5$



On trouve : $\boxed{\overline{S'C'} = 16{,}67 \text{ cm}}$

$\overline{S'C'} > 0$, d'où le schéma .

C'est un ménisque à bords épais

3°) Recherche du point double :

1ère Méthode :

On se propose de chercher la relation liant le point A avec son image A' à travers le système.

Soit A_0 l'image de A à travers le dioptre sphérique : $\frac{1}{\overline{SA}} - \frac{n}{\overline{SA_0}} = \frac{1-n}{\overline{SC}}$ [5]

A_0 a pour image à travers le miroir sphérique, A_1 tel que : $\frac{1}{\overline{S'A_0}} + \frac{1}{\overline{S'A_1}} = \frac{2}{\overline{S'C'}}$ [6]

Dans le sens de la lumière réfléchie, A_1 a pour image A' à travers le dioptre sphérique :

$$\frac{n}{\overline{SA_1}} - \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{n-1}{\overline{SC}} \qquad [7]$$

[5] et [7] donnent $\overline{SA_0}$ et $\overline{SA_1}$, en les reportant dans [6], car $\overline{S'A_0} = \overline{S'S} + \overline{SA_0}$;

$\overline{S'A_1} = \overline{S'S} + \overline{SA_1}$, nous avons la relation entre A et A' :

$$\frac{\overline{SC}+(n-1)\overline{SA}}{n\overline{SA}\,.\overline{SC}+\overline{S'S}\left[\overline{SC}+(n-1)\overline{SA}\right]}+\frac{\overline{SC}+(n-1)\overline{SA'}}{n\overline{SA'}\,\overline{SC}+\overline{S'S}\left[\overline{SC}+(n-1)\overline{SA'}\right]}=\frac{2}{\overline{S'C'}}$$

Lorsque A est image de lui même , $A \equiv A'$.

En remplaçant dans l'expression précédente , avec : $\overline{SC} = \overline{S'C'} = -R$; $\overline{S'S} = -a$

Nous avons : $$\boxed{\overline{SA} = \frac{R(a-R)}{(a-R)(n-1)+nR}}$$

$2^{\text{ème}}$ **Méthode :**

Le système étudié est catadioptrique, il est donc équivalent à un miroir sphérique de sommet Σ et de centre Ω. A et A' sont donc reliés par la relation : $\frac{1}{\overline{\Sigma A}} + \frac{1}{\overline{\Sigma A'}} = \frac{2}{\overline{\Sigma\Omega}}$

Lorsque $A \equiv A'$, cela entraîne $A \equiv \Omega$

Il suffit donc de chercher le centre du miroir équivalent. Ω est l'image du centre du miroir réel à travers le dioptre suivant le sens de la lumière réfléchie : $\frac{n}{\overline{SC'}} - \frac{1}{\overline{S\Omega}} = \frac{n-1}{\overline{SC}}$

avec $\overline{SC} = -R$; $\overline{SC'} = \overline{SS'} + \overline{S'C'} = a-R$; $\overline{S\Omega} = \overline{SA}$

nous avons : $$\boxed{\overline{SA} = \frac{R(a-R)}{(a-R)(n-1)+nR}}$$

Ce qui est en accord avec la 1ère méthode.

A.N : $a = 25cm$; $R = 50cm$; $n = 1,5$

On trouve : $$\boxed{\overline{SA} = -20\ cm}$$

Le point A se trouve entre S et C'

4°) a) Calcul de la distance focale :

La formule de Gullstrand appliquée aux deux lentilles donne : $\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{e}{f_1'f_2'}$

Soit $$\boxed{f' = \frac{f_1'f_2'}{f_1'+f_2'-e}} \qquad [8]$$

◆ **Position des foyers :**

* Soient F' le foyer image du système, F_1' celui de la première lentille. F' est l'image de F_1' à travers la deuxième lentille ; la formule de Newton donne : $\overline{F_2F_1'}\,.\,\overline{F_2'F'} = -f_2'^2$

or $\overline{F_1'F_2} = \Delta = \overline{F_1'O_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} = -f_1' + e - f_2'$

D'où $$\boxed{\overline{F_2'F'} = \frac{-f_2'^2}{f_1' - e + f_2'}} \qquad [9]$$

* Soient F le foyer objet du système , F_2 celui de la deuxième lentille. F_2 est l'image de F à travers la première lentille. La formule de Newton donne : $\overline{F_1F}\ .\ \overline{F_1'F_2} = -f_1'^2$

D'où $$\boxed{\overline{F_1F} = \frac{f_1'^2}{f_1' - e + f_2'}} \qquad [10]$$

◆ **Plans principaux :**

Le plan principal image est repéré par H' tel que : $\overline{H'F'} = \overline{H'F_2'} + \overline{F_2'F'}$, or d'après [8] :

$$f' = \overline{H'F'}$$

D'où $$\boxed{\overline{F_2'H'} = \overline{F_2'F'} - \overline{H'F'}} \qquad [11]$$

Le plan principal objet est repéré par H tel que : $\overline{HF} = \overline{HF_1} + \overline{F_1F}$, avec $\overline{HF} = -\overline{H'F'}$, car les milieux extrêmes sont identiques.

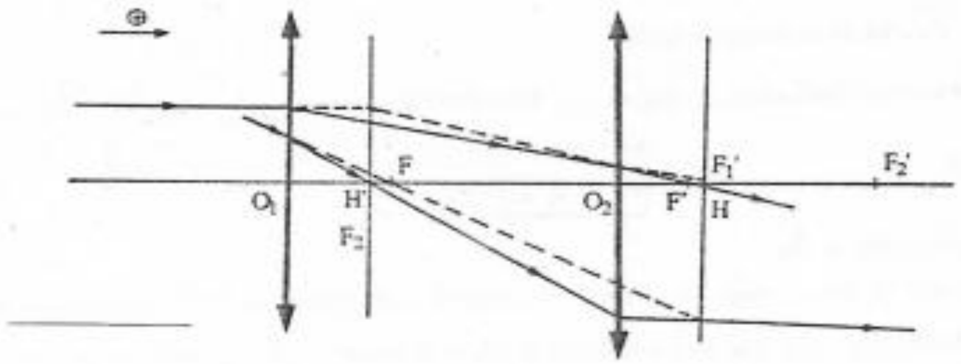
Par conséquent : $$\boxed{\overline{F_1H} = \overline{H'F'} + \overline{F_1F}} \qquad [12]$$

A.N $f_1' = 5$ cm ; $f_2' = 3$ cm ; $e = 4$ cm

Les relations [8], [9], [10], [11], [12] donnent : $f' = \overline{H'F'} = 3{,}75$ cm ; $\overline{F_2'F'} = -2{,}25$ cm

$\overline{F_1F} = 6{,}25$ cm ; $\overline{F_2'H'} = -6$ cm ; $\overline{F_1H} = 10$ cm.

Construction géométrique



Pour positionner F et H on peut le faire à partir de O_1, on vérifie que : $\overline{O_1F} = 1{,}25$ cm ; $\overline{O_1H} = 5$ cm.

Pour l'explication du tracé voir problème n° 11 ; I.
Le foyer objet est virtuel, car il se trouve dans l'espace objet virtuel.
Le foyer image est réel, puisqu'il se trouve dans l'espace image réel.

b) Les deux lentilles sont taillées dans le même verre, nous avons donc :

$$\frac{1}{f_1'} = (n-1)K_1 \;;\; \frac{1}{f_2'} = (n-1)K_2 \qquad \text{avec } K_1 \text{ et } K_2$$

des constantes dépendants des rayons de courbure des lentilles. Pour que la distance focale ne dépende pas de l'indice, on doit avoir $df' = 0$, soit $d\left(\frac{1}{f'}\right) = 0$

$$d\left(\frac{1}{f'}\right) = d\left(\frac{1}{f_1'}\right) + d\left(\frac{1}{f_2'}\right) - e\, d\left(\frac{1}{f_1' f_2'}\right) = -\frac{df_1'}{f_1'^2} - \frac{df_2'}{f_2'^2} + e\left(\frac{df_1'}{f_1'^2 f_2'} + \frac{df_2'}{f_2'^2 f_1'}\right)$$

avec $$-\frac{df_1'}{f_1'^2} = K_1\, dn = \frac{dn}{(n-1)f_1'} \quad ; \quad -\frac{df_2'}{f_2'^2} = K_2\, n = \frac{dn}{(n-1)f_2'}$$

Par conséquent : $$d\left(\frac{1}{f'}\right) = \frac{1}{(n-1)f_1' f_2'}\left[f_1' + f_2' - 2e\right]dn = 0$$

D'où $$\boxed{e = \frac{f_1' + f_2'}{2}} \qquad [13]$$

C'est la condition d'association de deux lentilles minces pour éviter le problème de dépendance de la distance focale en fonction de l'indice. Ce problème est connu par le nom d'aberration chromatique.

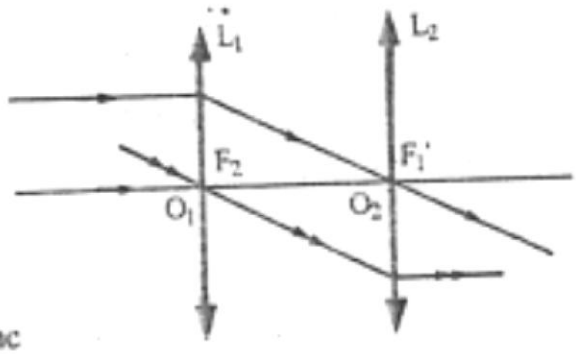
Application :

$f_1' = f_2' = 5$ cm et d'après [13] $e = 5$ cm.

D'après la figure on constate que :

$F' \equiv F_1' \equiv O_2$; $F \equiv F_2 \equiv O_1$; $H' \equiv F_2 \equiv O_1$

$H \equiv F_1' \equiv O_2$.

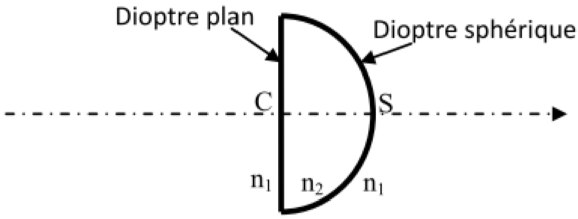


Les milieux extrêmes sont identiques, donc les plans nodaux, sont confondus avec les plans principaux correspondants.

Exercice 4 -Demi-boule

La lentille est constituée par deux dioptres :

- Dioptre plan : n_1-n_2 ;
- Dioptre sphérique de centre C et de sommet S : n_2-n_1.



1- Le type de la lentille concerne la partie courbe de la lentille (dioptre sphérique). Il est déterminé par l'une des deux méthodes suivantes :

Méthode 1 : On calcule la vergence V du dioptre sphérique :

- Si V est positive, alors la lentille est convergente ;
- Si V est négative, alors la lentille est divergente.

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{n_1 - n_2}}{\overline{\mathbf{SC}}}$$

Dans notre cas n1 <n2 et $\overline{\mathbf{SC}}$ est négative donc V > 0 ➔ lentille convergente

Méthode 2 : On détermine la position du foyer image F ' du dioptre sphérique :

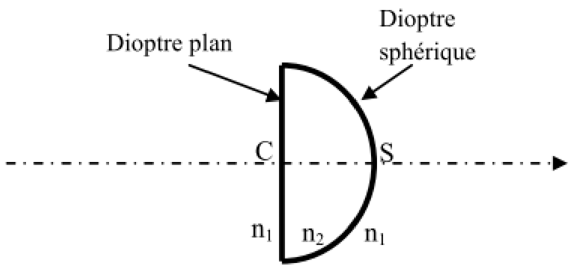
- Si $\overline{\mathbf{SF'}}$ est positive, la lentille est convergente ;
- Si elle est négative alors la lentille est divergente.

Le calcul de SF ' se fera dans la question 2, elle est positive donc la lentille est convergente.

Géométriquement, il suffit de prendre un faisceau parallèle à l'axe optique ; puis voir s'il converge ou diverge après réfraction.

2- Dans les conditions de Gauss, les différents angles sont faibles.

2-1 La relation de conjugaison est la formule qui donne la position de l'image A' d'un objet A situé sur l'axe optique.



Puisque la lentille est composée par deux dioptres, on peut dire donc que :

- le premier dioptre crée, à partir d'un objet A, une image A'' ;

- puis le deuxième dioptre crée, à partir de l'objet A", une image A'.

soit :

Objet A $\xrightarrow{\text{Dioptre plan : } n_1\text{-}n_2}$ image A" : $\overline{CA''} = \frac{n_2}{n_1}\overline{CA}$ car A se trouve sur l'axe optique.

Objet A" $\xrightarrow{\text{Dioptre sphérique } n_2\text{-}n_1}$ image A' : $\frac{n_2}{\overline{CA'}} - \frac{n_1}{\overline{CA''}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{CS}}$

En remplaçant, dans cette dernière relation, $\overline{CA''}$ par $\frac{n_2}{n_1}\overline{CA}$, on tire la relation de conjugaison de la lentille demi-boule :

$$\boxed{\frac{n_2}{\overline{CA'}} - \frac{n_1^2}{n_2\overline{CA}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{CS}}}$$

2-2 le foyer image F' peut être déterminé à partir de la relation de conjugaison, sachant qu'un objet A se trouvant à l'infinie, son image A' se trouve au foyer image F' :

$\frac{n_2}{\overline{CF'}} - \frac{n_1^2}{\infty} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{CS}}$, ce qui donne : $\boxed{\overline{CF'} = \frac{n_2}{n_2 - n_1}\overline{CS}}$

2-3 le foyer objet F peut être déterminé à partir de la relation de conjugaison, sachant qu'un objet A se trouvant sur le foyer F, son image A' se trouve à l'infini :

$\frac{n_2}{\infty} - \frac{n_1^2}{n_2\overline{CF}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{CS}}$, ce qui donne : $\boxed{\overline{CF} = \frac{n_1^2}{n_2}\frac{\overline{CS}}{n_1 - n_2}}$

2-4 Pour exprimer le grandissement latéral, on procède comme précédemment :

Objet AB $\xrightarrow{\text{Dioptre plan : } n_1\text{-}n_2}$ image A"B" : $\gamma_1 = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = 1$ car AB est parallèle au dioptre plan.

Objet A"B" $\xrightarrow{\text{Dioptre sphérique } n_2\text{-}n_1}$ image A'B' : $\gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A''B''}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA''}}$

Le grandissement de la lentille demi-boule est

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \gamma_1\gamma_2 = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA''}}$$

Or : $\overline{CA''} = \frac{n_2}{n_1}\overline{CA}$, ce qui donne :

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \gamma_1\gamma_2 = \frac{n_1}{n_2}\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}}$$

Exercice 5

Exercice 5 :

1- Le système est constitué de deux miroirs M_1 et M_2:

$$A \xrightarrow{M_1} A_1 \xrightarrow{M_2} A'$$

$$A \xrightarrow{M_1} A_1 : \frac{1}{\overline{CA_1}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS_1}} \qquad (1)$$

$$A_1 \xrightarrow{M_2} A' : \frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA_1}} = \frac{2}{\overline{CS_2}} \qquad (2)$$

(2) – (1) donne :

$$\frac{1}{\overline{CA'}} - \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS_2}} - \frac{2}{\overline{CS_1}}$$

D'où l'on tire la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{CA'}} - \frac{1}{\overline{CA}} = 2\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{3R}\right] = \frac{4}{3R} \qquad (3)$$

On tire facilement la position de A' :

$$\frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{1}{\overline{CA}} + \frac{4}{3R} \quad \Rightarrow \quad \overline{CA'} = \frac{3R\,\overline{CA}}{3R + 4\,\overline{CA}}$$

2- Grandissement transversal :

On a $\quad \gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA_1}}{\overline{CA}}$

$$\gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA_1}}$$

soit $\quad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \gamma_2\gamma_1 = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \frac{3R}{3R + 4\,\overline{CA}}$

3- Equivalence avec une lentille :

On remarque bien que la relation (3) est identique à la relation de conjugaison d'une lentille mince de centre optique O = C et de distance focale :

$$f' = \overline{CF'} = \frac{3}{4}R$$

Puisque f ' >0 alors la lentille est convergente.

Exercice 6

Rayon de courbure du miroir équivalent : $\overline{S\Omega} = R$

$$\boxed{R = \frac{R_1 R_2}{(1-n)R_2 + nR_1}}$$

Nature du miroir équivalent :

Il s'agit de trouver le signe de R.

$1 - n < 0$; $R_1 < 0$; $R_2 < 0$ donc : $R > 0$ par conséquent le miroir sphérique équivalent est convexe.

Remarque : On laisse au lecteur le soin de montrer qu'on arrive au même résultat en utilisant le théorème entre l'équivalence d'un système catadioptrique et d'un miroir.

III) 1°) Détermination du centre optique de la lentille :

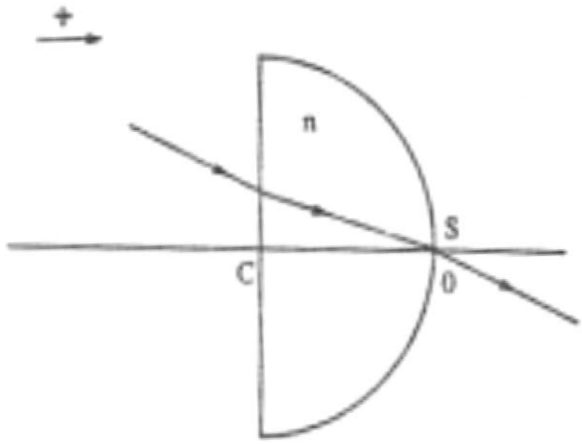
Soit O le centre optique de la lentille ; son expression est donnée par (voir rappels) :

$$\frac{\overline{OS_1}}{\overline{OS_2}} = \frac{\overline{S_1C_1}}{\overline{S_2C_2}} \qquad [1]$$

S_1, C_1 sont respectivement le sommet et le centre du premier dioptre ; de même pour S_2, C_2 relativement au deuxième dioptre.

Dans notre cas la face d'entrée est plane : $\overline{S_1C_1}$ tend vers l'infini. Par ailleurs $S_1 = C$; $S_2 = C$; $\overline{S_2C_2} = \overline{SC}$

En utilisant [1] : $\frac{\overline{OC}}{\overline{OS}}$ tend vers l'infini ; par conséquent O est confondu avec S.



Tout rayon passant par O ressort parallèlement à sa direction d'incidence.

Déduction des points nodaux N, N' :

Dans les conditions de Gauss O est l'image de N à travers le premier dioptre.

La formule de conjugaison du dioptre plan donne : $\frac{1}{\overline{CN}} - \frac{n}{\overline{CO}} = 0$

Or $O \equiv S$, donc $$\boxed{\overline{CN} = \frac{R}{n}}$$ [2]

A.N : $n = 3/2$

$$\boxed{\overline{CN} = \frac{2R}{3}}$$

Dans les conditions de Gauss N' est l'image de O à travers le deuxième dioptre.

La formule de conjugaison du dioptre sphérique avec origine au centre donne :

$$\frac{n}{\overline{CN'}} - \frac{1}{\overline{CO}} = \frac{(n-1)}{\overline{CS}}$$

Soit $$\boxed{\overline{CN'} = R} \ , \ N' \equiv S$$ [3]

Le point nodal image est confondu avec S.

2°) Plans principaux P et P' :

Soit H le point principal objet, d'après le cours : $\overline{HN} = \overline{HF} + \overline{H'F'}$; or les milieux extrêmes sont identiques, d'où $\overline{HF} + \overline{H'F'} = 0$, donc $\overline{HN} = 0$; de même , $\overline{H'N'} = 0$.

Les points principaux sont donc confondus avec les points nodaux correspondants ; cela découle du fait que les milieux extrêmes sont identiques (Air).

Nous avons donc d'après [2] et [3] : $\overline{CH} = \overline{CN} = \frac{R}{n}$; $H' \equiv N' \equiv S$

Les plans principaux P et P', sont les plans perpendiculaires à l'axe optique et passant par les points principaux correspondants.

Foyers objet et image F, F' :

Nous allons chercher la relation de conjugaison de la lentille demi-boule.
Soit A un point objet admettant A_0 pour image à travers le dioptre plan :

$$\frac{1}{\overline{CA}} - \frac{n}{\overline{CA_0}} = 0$$ [4]

Le point A_0 admet pour image A' à travers le dioptre sphérique ; la formule de conjugaison avec origine au centre donne : $$\frac{1}{\overline{CA_0}} - \frac{n}{\overline{CA'}} = \frac{1-n}{\overline{CS}}$$ [5]

[4] + n.[5] entraîne : $$\frac{1}{\overline{CA}} - \frac{n^2}{\overline{CA'}} = \frac{n(1-n)}{\overline{CS}}$$ [6]

◆ Le foyer objet s'obtient pour $\overline{CA'}$ tendant vers l'infini : $$\boxed{\overline{CF} = \frac{R}{n(1-n)}}$$

◆ Le foyer image s'obtient pour $\overline{CA}$ tendant vers l'infini : $\boxed{\overline{CF'} = \dfrac{nR}{n-1}}$

A.N : $n = 3/2$

Donc $\overline{CF} = -\dfrac{4R}{3}$; $\overline{CF'} = 3\,R$

3°) Construction géométrique :

Prenons un objet *AB* réel situé entre *C* et *F*, avec, par exemple, $\overline{CA} = -R/2$; son image est virtuelle telle que $\overline{CA'} = -1{,}8\,R$. On peut vérifier cela à partir de [6].

Pour la construction géométrique, on a considéré un faisceau incident parallèle à l'axe optique, qui converge en *F'*, le point *I* est pratiquement confondu avec *P'*, car nous sommes dans les conditions de Gauss.

Le deuxième rayon issu de *B* semble se diriger vers *N*, donc il se réfracte sur la face plane et passe par *O*, par conséquent il va émerger parallèlement à sa direction d'incidence.

Le troisième faisceau est issu de *A* et confondu avec l'axe optique. Pour tracer l'image il suffit de chercher l'intersection *B'* des prolongements des deux rayons issus de *B*, puis de tracer la droite passant par *B'* et perpendiculaire à l'axe optique : on obtient une image droite virtuelle.